*Theoretical and Mathematical Physics**
132 *(2002) 1080, nlin.SI/0206044*

N=(1|1) supersymmetric dispersionless Toda lattice hierarchy

V.G. Kadyshevsky[(a)] and A.S. Sorin[(b)]

Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics,
Joint Institute for Nuclear Research,
141980 Dubna, Moscow Region, Russia
[(a)] *Email: kadyshev@jinr.ru*
[(b)] Email: sorin@thsun1.jinr.ru

Abstract

Generalizing the graded commutator in superalgebras, we propose a new bracket operation on the space of graded operators with an involution. We study properties of this operation and show that the Lax representation of the two-dimensional N=(1|1) supersymmetric Toda lattice hierarchy can be realized via the generalized bracket operation; this is important in constructing the semiclassical (continuum) limit of this hierarchy. We construct the continuum limit of the N=(1|1) Toda lattice hierarchy, the dispersionless N=(1|1) Toda hierarchy. In this limit, we obtain the Lax representation, with the generalized graded bracket becoming the corresponding Poisson bracket on the graded phase superspace. We find bosonic symmetries of the dispersionless N=(1|1) supersymmetric Toda equation.

Dedicated to the 75th birthday of Academician Anatolii Alekseevich Logunov

*Translated from Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **132** (2002) 222.

1 Introduction

In several recent decades, quantum field theory, having incorporated efficient mathematical methods, has become a theory satisfying the most rigorous mathematical requirements [1]. After the formulation of supersymmetric quantum field theories, the main attention of investigators was attracted to numerous problems whose solution is interesting in both mathematical physics and important physical applications.

In this paper, we consider an integrable $N{=}(1|1)$ supersymmetric generalization of the two-dimensional bosonic Toda lattice hierarchy (2DTL hierarchy) [2] proposed in [3], [4]. It is given by an infinite system of evolution equations (flows) for an infinite set of bosonic and fermionic lattice fields evolving in two bosonic and two fermionic infinite "towers" of times; as a subsystem, it involves an $N{=}(1|1)$ supersymmetric integrable generalization of the 2DTL equation, which is called the $N{=}(1|1)$ 2DTL in what follows.

Two new infinite series of fermionic flows of the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy were constructed in [5]–[7]. This hierarchy was shown to actually have a higher symmetry, namely, the $N = (2|2)$ supersymmetry. Together with the previously known bosonic flows of the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy, these flows are symmetries of the $N{=}(1|1)$ 2DTL equation. The continuum limit of that equation with respect to the lattice constant [8] is a three-dimensional nonlinear equation, called the continuum or dispersionless $N{=}(1|1)$ 2DTL equation. The solution of the corresponding Cauchy problem was also considered in [8].

Although the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy and the dispersionless $N{=}(1|1)$ 2DTL equation have been known for a relatively long time, the problem of constructing the continuum (semiclassical) limit with respect to the lattice constant (which plays the role of the Planck constant here) for all the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy flows is still to be solved and is quite complicated.[1] Apart from the purely academic significance of this problem, its solution is also interesting in relation to a number of important physical and mathematical applications. In particular, these include the semiclassical limit of the bosonic preimage of the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy, the

[1] We note that similar problems for differential–difference equations were considered in [9]–[16].

dispersionless 2DTL hierarchy [17], which unifies the 2DTL hierarchy flows arising in the leading semiclassical approximation constructed in [18] (see also [19]). Possible applications of the dispersionless 2DTL hierarchy are

1. construction of a number of self-dual vacuum metrics and Einstein–Weyl metrics,
2. twistor theory,
3. two-dimensional conformal and topological field theory, and
4. two-dimensional string theory

(also see [20]–[31] and the references therein).

In view of a deep relation between the 2DTL and $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchies, it is natural to hypothesize that the dispersionless $N{=}(1|1)$ supersymmetric 2DTL hierarchy must also admit similar applications in supersymmetric generalizations of the theories listed above. This motivates our construction of the dispersionless $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy here.

We emphasize that the existing general algorithm for constructing semiclassical asymptotic expansions, which was applied to the 2DTL hierarchy in [18], encounters a number of difficulties, both formal and informal, in its direct extension to the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy. It is well-known that in the semiclassical limit, all the operators are mapped into their symbols defined on the corresponding phase space and the (anti)commutators involved in the standard Lax representations are replaced with the corresponding Poisson brackets. But the Lax representation of the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy proposed in [3] is not of the (anti)commutator form, and it is therefore unclear how the above qualitative recipe for the transition to the semiclassical regime can be applied literally.

The analysis is also complicated by another principally important, qualitatively new feature of the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy compared with its bosonic preimage, namely, the operators entering the Lax representation are defined on a space with two Z_2-gradings but have only one diagonal Z_2-grading. This is why the symbols of these operators in the general case cannot be expected to commute, even in the semiclassical limit.

We also mention possible complications related to the fact that the fermionic and bosonic fields of the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy can have noncoincident semiclassical asymptotic behaviors, which must then be specified self-consistently. A similar situation occurs for the fermionic and

bosonic times of this hierarchy, but these can be easily made consistent using additional dimension arguments.

Very recently, a certain progress has been observed toward constructing the semiclassical limit of the N=(1|1) 2DTL hierarchy. In [7], it was found that the Lax representation for this hierarchy can be brought to the commutator form (Eq. (39) in [7]) by introducing a number of new auxiliary fermionic constants. Although the commutator representation thus obtained seems artificial at first glance, it actually involves a new important generalized graded bracket operation, which can be defined in sufficiently general terms to allow a broad spectrum of applications. We introduce and use it in solving the problem addressed here.

It turns out that all the basic relations defining the N=(1|1) 2DTL hierarchy can be expressed in terms of precisely this bracket operation; this does not require introducing any auxiliary objects like the fermionic constants mentioned above. In the semiclassical limit, moreover, precisely this bracket operation is replaced with the corresponding Poisson superbracket on the phase superspace. This therefore produces the Lax representation of the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy.

The structure of this paper is as follows. In Sec. 2, we introduce the generalized graded bracket operation on the space of graded operators with an involution that generalizes the graded commutator for superalgebras; we describe its properties and give the corresponding generalized Jacobi identities. We then obtain the Lax representation of the N=(1|1) 2DTL hierarchy and all the basic defining relations in terms of the generalized graded bracket. We give an explicit expression for the N=(1|1) 2DTL hierarchy flows and for bosonic symmetries of the N=(1|1) 2DTL equation, which are consequently used in Sec. 3 to obtain the respective dispersionless analogues.

In Sec. 3, we also find the semiclassical limit of the N=(1|1) 2DTL hierarchy and postulate the corresponding asymptotic behavior of the fermionic and bosonic fields parameterizing the Lax operators. Using these data, we then evaluate the asymptotic behavior of all the composite operators entering the Lax representation and the corresponding field evolution equations. We next obtain regular leading terms in the semiclassical expansion of these evolution equations, which are by definition the flows of the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy. This a posteriori demon-

strates self-consistency of the postulates underlying all our calculations. The next step is to model the Poisson superbracket on the phase superspace obtained by extending the phase space of the dispersionless 2DTL hierarchy by one Grassmann coordinate. Replacing the Lax operators with their symbols and replacing the generalized graded bracket with the above Poisson superbracket in the Lax representation of the N=(1|1) 2DTL hierarchy and in all its defining relations, we show by a direct calculation that the operator representation thus obtained correctly reproduces the flows of the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy that we constructed previously and is therefore the sought Lax representation of the above hierarchy.

In Sec. 4, we briefly summarize the main results obtained in this paper.

2 N=(1|1) 2DTL hierarchy

In this section, we introduce a new graded bracket operation and use it to propose a new form of the Lax representation for the N=(1|1) 2DTL hierarchy.

2.1 Generalized graded brackets

We consider the space of operators $\mathbb{O}_k$ with the grading $d_{\mathbb{O}_k}$ ($d_{\mathbb{O}_k} \in \mathbb{Z}$),

$$d_{\mathbb{O}_1\mathbb{O}_2} = d_{\mathbb{O}_1} + d_{\mathbb{O}_2}, \tag{1}$$

and the involution $*$,

$$\mathbb{O}_k^{*(2)} = \mathbb{O}_k, \tag{2}$$

where ${\mathbb{O}_k}^{*(m)}$ denotes the m-fold action of the involution $*$ on the operator $\mathbb{O}_k$. On this space, we can define the generalized graded bracket operation $[\,\cdot\,,\,\cdot\,\}$,

$$\Big[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\Big\} := \mathbb{O}_1\mathbb{O}_2 - (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2}}\ {\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}\ {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})} \tag{3}$$

with the easily verified properties of

a. *symmetry*

$$\Big[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\Big\} = (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2}+1} \Big[{\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}, {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}\Big\}, \tag{4}$$

b. *derivation*

$$\Big[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\mathbb{O}_3\Big\} = \Big[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\Big\}\mathbb{O}_3 + (-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_2}} \mathbb{O}_2^{*(d_{\mathbb{O}_1})} \Big[{\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \mathbb{O}_3\Big\}, \tag{5}$$

c. *Jacobi identity*

$$\begin{aligned} &(-1)^{d_{\mathbb{O}_1} d_{\mathbb{O}_3}} \Big[\Big[{\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_3})}, \mathbb{O}_2\Big\}, {\mathbb{O}_3}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}\Big\} \\ &+ (-1)^{d_{\mathbb{O}_2} d_{\mathbb{O}_1}} \Big[\Big[{\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}, \mathbb{O}_3\Big\}, {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}\Big\} \\ &+ (-1)^{d_{\mathbb{O}_3} d_{\mathbb{O}_2}} \Big[\Big[{\mathbb{O}_3}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \mathbb{O}_1\Big\}, {\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_3})}\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Relations (4–6) generalize the corresponding properties of the graded commutator in Lie superalgebras. We emphasize that in the particular case where the involution $*$ acts as the identity transformation, bracket (3) reproduces the graded Lie superalgebra commutator. In the general case of the involution action, this bracket is a nontrivial generalization of that commutator.

2.2 Lax representation and flows

We begin this section by detailing the space of operators, their grading, and involution which are relevant in context of the N=(1|1) 2DTL hierarchy. These operators can be represented in the general form

$$\mathbb{O}_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

parameterized by the functions $f_{2k,j}^{(m)}$ ($f_{2k+1,j}^{(m)}$) that are Z_2-graded bosonic (fermionic) lattice fields ($j \in \mathbb{Z}$),

$$d'_{f_{k,j}^{(m)}} = |k| \mod 2; \tag{8}$$

the operator $e^{l\partial}$ ($l \in \mathbb{Z}$) acting on these fields as the discrete lattice shift

$$e^{l\partial} f^{(m)}_{k,j} \equiv f^{(m)}_{k,j+l} e^{l\partial} \tag{9}$$

has another Z_2-grading given by

$$d_{e^{l\partial}} = |l| \mod 2. \tag{10}$$

Operators (7) allow specifying only one diagonal Z_2-grading

$$d_{\mathbb{O}_m} = d^{'}_{f^{(m)}_{k,j}} + d_{e^{(k-m)\partial}} = |m| \mod 2 \tag{11}$$

and the involution

$$\mathbb{O}^*_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f^{(m)}_{k,j} e^{(k-m)\partial}. \tag{12}$$

In what follows, we also need the projections $(\mathbb{O}_m)_\pm$ of the operators $\mathbb{O}_m$ (7) defined as

$$(\mathbb{O}_m)_+ = \sum_{k=m}^{\infty} f^{(m)}_{k,j} e^{(k-m)\partial}, \quad (\mathbb{O}_m)_- = \sum_{k=-\infty}^{m-1} f^{(m)}_{k,j} e^{(k-m)\partial}. \tag{13}$$

The Lax operators $L^\pm$ of the N=(1|1) 2DTL hierarchy belong to the space of operators (7) [3, 7]

$$L^+ = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,j} e^{(1-k)\partial}, \quad u_{0,j} = 1, \quad L^- = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,j} e^{(k-1)\partial}, \quad v_{0,j} \neq 0 \tag{14}$$

and have the grading $d_{L^\pm} = 1$.

We now have all the ingredients necessary to express the Lax representation of the N=(1|1) 2DTL hierarchy in terms of bracket operation (3), thereby bringing it to a very simple form,

$$D^\pm_n L^\alpha = \mp \alpha (-1)^n \Big[(((L^\pm)^n_*)_{-\alpha})^*, L^\alpha \Big\}, \quad \alpha = +, -, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

where $D^\pm_{2n}$ ($D^\pm_{2n+1}$) are bosonic (fermionic) evolution derivatives.

For the composite operators $(L^{\pm})^n_*$ entering this representation, we can also obtain very simple expressions in terms of the Lax operators and bracket operation (3),

$$(L^{\alpha})^{2n}_* := \Big(\frac{1}{2} \Big[(L^{\alpha})^*, (L^{\alpha})\Big\} \Big)^n, \quad (L^{\alpha})^{2m+1}_* := L^{\alpha} \ (L^{\alpha})^{2n}_*. \qquad (16)$$

Similarly to the Lax operators $L^{\pm}$, the operators $(L^{\pm})^n_*$ belong to the space of operators (7) and can be represented as

$$(L^+)^m_* := \sum_{k=0}^{\infty} u^{(m)}_{k,j} e^{(m-k)\partial}, \quad u^{(m)}_{0,j} = 1, \quad (L^-)^m_* := \sum_{k=0}^{\infty} v^{(m)}_{k,j} e^{(k-m)\partial}, (17)$$

where $u^{(m)}_{k,j}$ and $v^{(m)}_{k,j}$ (with $u^{(1)}_{k,j} \equiv u_{k,j}, \ v^{(1)}_{k,j} \equiv v_{k,j}$) are functionals of the original fields $\{u_{k,j}, \ v_{k,j}\}$. It must be noted here that in Lax representation (15), the Z_2-grading of the operatora $(L^{\pm})^n_*$, which has the form $d_{(L^{\pm})^{2n}_*} = 0$ and $d_{(L^{\pm})^{2n+1}_*} = 1$, agrees with another Z_2-grading $d^{'}_{D^{\pm}_{2n}} = 0$ and $d^{'}_{D^{\pm}_{2n+1}} = 1$ that corresponds to the statistics of the evolution derivatives $D^{\pm}_n$.

Using bracket properties (4–6) and relations (16) as definitions of $(L^{\pm})^n_*$, we can easily obtain the useful identities

$$\begin{aligned}
&\Big[(L^{\alpha})^{2n}_*, (L^{\alpha})^{2m}_*\Big\} = 0, \\
&\Big[((L^{\alpha})^{2n}_*)^*, (L^{\alpha})^{2m+1}_*\Big\} = 0, \quad \Big[(L^{\alpha})^{2n+1}_*, (L^{\alpha})^{2m}_*\Big\} = 0, \\
&\Big[((L^{\alpha})^{2n+1}_*)^*, (L^{\alpha})^{2m+1}_*\Big\} = 2(L^{\alpha})^{2(n+m+1)}_*. \qquad (18)
\end{aligned}$$

Next, using Eqs. (4–6) and (15–16), we can derive equations of motion for the composite operators $(L^{\pm})^n_*$,

$$D^{\pm}_n (L^{\alpha})^m_* = \mp \alpha (-1)^{nm} \Big[(((L^{\pm})^n_*)_{-\alpha})^{*(m)}, (L^{\alpha})^m_*\Big\}, \qquad (19)$$

and the evolution equations for the functionals $\{u^{(m)}_{k,j}, \ v^{(m)}_{k,j}\}$ in (17) implied by Eqs. (19) found above,

$$\begin{aligned}
D^+_n u^{(2m)}_{k,j} = &\sum_{p=0}^{n} (u^{(n)}_{p,j} u^{(2m)}_{k-p+n,j-p+n} \\
&- (-1)^{(p+n)(k-p+n)} u^{(n)}_{p,j-k+p-n+2m} u^{(2m)}_{k-p+n,j}),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D^+_{2n}u^{(2m+1)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{2n}((-1)^p u^{(2n)}_{p,j}u^{(2m+1)}_{k-p+2n,j-p+2n} \\
&- (-1)^{p(k-p)}u^{(2n)}_{p,j-k+p-2n+2m+1}u^{(2m+1)}_{k-p+2n,j}), \\
D^+_{2n+1}u^{(2m+1)}_{k,j} &= \sum_{p=1}^{k}((-1)^{p+1}u^{(2n+1)}_{p+2n+1,j}u^{(2m+1)}_{k-p,j-p} \\
&+ (-1)^{p(k-p)}u^{(2n+1)}_{p+2n+1,j-k+p+2m+1}u^{(2m+1)}_{k-p,j}),
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
D^-_{n}u^{(m)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{n-1}((-1)^{(p+n)m}v^{(n)}_{p,j}u^{(m)}_{k+p-n,j+p-n} \\
&- (-1)^{(p+n)(k+p-n)}v^{(n)}_{p,j-k-p+n+m}u^{(m)}_{k+p-n,j}),
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
D^+_{n}v^{(m)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{n}((-1)^{(p+n)m}u^{(n)}_{p,j}v^{(m)}_{k+p-n,j-p+n} \\
&- (-1)^{(p+n)(k+p-n)}u^{(n)}_{p,j+k+p-n-m}v^{(m)}_{k+p-n,j}),
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
D^-_{n}v^{(2m)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{n-1}(v^{(n)}_{p,j}v^{(2m)}_{k-p+n,j+p-n} \\
&- (-1)^{(p+n)(k-p+n)}v^{(n)}_{p,j+k-p+n-2m}v^{(2m)}_{k-p+n,j}), \\
D^-_{2n}v^{(2m+1)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{2n-1}((-1)^p v^{(2n)}_{p,j}v^{(2m+1)}_{k-p+2n,j+p-2n} \\
&- (-1)^{p(k-p)}v^{(2n)}_{p,j+k-p+2n-2m-1}v^{(2m+1)}_{k-p+2n,j}), \\
D^-_{2n+1}v^{(2m+1)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{k}((-1)^{p+1}v^{(2n+1)}_{p+2n+1,j}v^{(2m+1)}_{k-p,j+p} \\
&+ (-1)^{p(k-p)}v^{(2n+1)}_{p+2n+1,j+k-p-2m-1}v^{(2m+1)}_{k-p,j})
\end{aligned} \tag{23}
$$

(in the right-hand side of these equations, all the fields $\{u^{(m)}_{k,j},\ v^{(m)}_{k,j}\}$ with $k<0$ must be set equal to zero).

Lax representation (15) generates a non-Abelian algebra of flows of the N=(1|1) 2DTL hierarchy,

$$[D_n^+ \ , \ D_l^-\} = [D_n^\pm \ , \ D_{2l}^\pm] = 0, \quad \{D_{2n+1}^\pm \ , \ D_{2l+1}^\pm\} = 2D_{2(n+l+1)}^\pm, \quad (24)$$

which can be realized as

$$D_{2n}^\pm = \partial_{2n}^\pm, \quad D_{2n+1}^\pm = \partial_{2n+1}^\pm + \sum_{l=1}^{\infty} t_{2l-1}^\pm \partial_{2(k+l)}^\pm, \quad \partial_n^\pm := \frac{\partial}{\partial t_n^\pm}, \quad (25)$$

where $t_{2n}^\pm$ ($t_{2n+1}^\pm$) are bosonic (fermionic) evolution times. The dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy flows are based on the continuum limit of flows (20–23) constructed in Sec. 3.1.

2.3 Bosonic symmetries of the N=(1|1) 2DTL equation

The supersymmetric N=(1|1) 2DTL equation

$$D_1^+ D_1^- \ln v_{0,j} = v_{0,j+1} - v_{0,j-1} \quad (26)$$

belongs to system of equations (20–23). It can be obtained from Eq. (21) with $\{n = m = k = 1\}$,

$$D_1^- u_{1,j} = -v_{0,j} - v_{0,j+1}, \quad (27)$$

and from Eq. (22) with $\{n = m = 1, \ k = 0\}$,

$$D_1^+ v_{0,j} = v_{0,j}(u_{1,j} - u_{1,j-1}), \quad (28)$$

after eliminating the field $u_{1,j}$. Its bosonic symmetries $D_{2n}^\pm v_{0,j}$, with

$$\{D_1^+, D_{2n}^\pm\} = \{D_1^-, D_{2n}^\pm\} = 0, \quad (29)$$

were described in [5]–[7] in terms of the iteration procedure

$$\begin{aligned} D_{2n}^\pm v_{0,j} &= v_{0,j}(u_{2n,j}^{(2n)\pm} - u_{2n,j-1}^{(2n)\pm}), \quad u_{0,j}^{(2n)\pm} = 1, \\ \pm D_1^\mp u_{k,j}^{(2n)\pm} &= v_{0,j} u_{k-1,j-1}^{(2n)\pm} + (-1)^k v_{0,j-k+2n+1} u_{k-1,j}^{(2n)\pm}, \end{aligned} \quad (30)$$

where the functions $u_{k,j}^{(n)\pm}$ are related to the original functionals $\{u_{k,j}^{(n)}, v_{k,j}^{(n)}\}$ as

$$u_{k,j}^{(n)+} = u_{k,j}^{(n)}, \quad u_{k,j}^{(n)-} = \frac{v_{k,-j-1}^{(n)}}{\sum_{m=1}^{n-k} v_{0,k+m-n-j-1}} \tag{31}$$

(for detail, see [7]).

The continuum limit of N=(1|1) 2DTL equation (26) and of its symmetries $D_{2n}^{\pm} v_{0,j}$ (30) is derived in Sec. 3.2.

3 The dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy

In this section, we construct the continuum (semiclassical) limit of the N=(1|1) 2DTL hierarchy with respect to the lattice constant, which gives the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy, and construct the corresponding Lax representation.

3.1 Semiclassical limit

Flows (20–23) of the N=(1|1) 2DTL hierarchy do not involve an explicit dependence on dimensional constants, and the lattice with the dimensionless coordinate j ($j \in \mathbb{Z}$) has the unit spacing constant. To study the continuum limit, we explicitly introduce the lattice spacing length. This parameter is denoted by $\hbar$ because it plays the role of the Planck constant in what follows. Instead of j, there then arises the combination

$$\hbar j \equiv s, \tag{32}$$

and all the lattice fields acquire a dependence on the parameter $\hbar$. The continuum (semiclassical) limit can then be defined as

$$\hbar \to 0, \quad s = \lim_{\hbar \to 0,\ j>>1} (\hbar j), \tag{33}$$

with s playing the role of the continuum "lattice" coordinate.

For the flows in Eqs. (20–23) to be nontrivial and regular in the limit in Eq. (33), we must additionally perform several scaling transformations of

the dependent and independent variables in the system. We postulate the rules for transition to the new evolution times and fields of the hierarchy given by

$$t^{\pm}_{2n+1} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\hbar}} t^{\pm}_{2n+1}, \quad t^{\pm}_{2n} \rightarrow \frac{1}{\hbar} t^{\pm}_{2n} \;\Leftrightarrow\; D^{\pm}_{2n+1} \rightarrow \sqrt{\hbar} D^{\pm}_{2n+1}, \quad D^{\pm}_{2n} \rightarrow \hbar D^{\pm}_{2n}, \tag{34}$$

$$\begin{array}{llll} u_{2k,j} & \rightarrow \quad u_{2k}(\hbar j), & v_{2k,j} & \rightarrow \quad v_{2k}(\hbar j), \\ u_{2k+1,j} & \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, u_{2k+1}(\hbar j), & v_{2k+1,j} & \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, v_{2k+1}(\hbar j), \end{array} \tag{35}$$

and assume they are nonsingular at $\hbar = 0$.

We can now establish two important properties of semiclassical limit (33–35), which have a key importance in what follows and are verified by direct calculations.

The first property is that the new composite fields defined in accordance with the rules

$$\begin{array}{llll} u^{(m)}_{2k,j} & \rightarrow \quad u^{(m)}_{2k}(\hbar j), & v^{(m)}_{2k,j} & \rightarrow \quad v^{(m)}_{2k}(\hbar j), \\ u^{(2m+1)}_{2k+1,j} & \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, u^{(2m+1)}_{2k+1}(\hbar j), & v^{(2m+1)}_{2k+1,j} & \rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, v^{(2m+1)}_{2k+1}(\hbar j), \\ u^{(2m)}_{2k+1,j} & \rightarrow \sqrt{\hbar}\, u^{(2m)}_{2k+1}(\hbar j), & v^{(2m)}_{2k+1,j} & \rightarrow \sqrt{\hbar}\, v^{(2m)}_{2k+1}(\hbar j), \end{array} \tag{36}$$

are regular in the semiclassical limit.

From rules (33–36) and the obvious identities

$$(L^{\alpha})^{2(m+1)}_{*} := (L^{\alpha})^{2}_{*}(L^{\alpha})^{2m}_{*}, \quad (L^{\alpha})^{(2m+1)}_{*} := L^{\alpha}(L^{\alpha})^{2m}_{*}, \tag{37}$$

which follow from Eqs. (16), we can, for example, obtain the important recursive relations for the leading terms of the functionals $u^{(m)}_k \equiv u^{(m)}_k(s)$,

$$\begin{array}{ll} u^{(2(l+1))}_{2k} = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} u^{(2)}_{2n} u^{(2l)}_{2(k-n)}, & u^{(2(l+1))}_{2k+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{2k+1} u^{(2)}_{n} u^{(2l)}_{2k-n+1}, \\ u^{(2l+1)}_{2k} = \displaystyle\sum_{n=0}^{2k} u_{n} u^{(2l)}_{2k-n}, & u^{(2l+1)}_{2k+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} u_{2n+1} u^{(2l)}_{2(k-n)}, \end{array} \tag{38}$$

$$u_{2k}^{(2)}=\sum_{n=0}^{k}u_{2n}u_{2(k-n)}+2\sum_{n=0}^{k-1}(k-n-1)u_{2(k-n)-1}\partial_s u_{2n+1},$$

$$u_{2k+1}^{(2)}=\sum_{n=0}^{k}\Big[(1-2n)u_{2n}\partial_s u_{2(k-n)+1}+2(k-n)u_{2(k-n)+1}\partial_s u_{2n}\Big], \quad (39)$$

where $\partial_s := \frac{\partial}{\partial s}$.

The second property is that in semiclassical limit (33–36) flows (20–23) of the $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy are nontrivial and regular. Explicit expressions for their leading terms are as follows.

For $\{m=2l,\ k=2r\}$ or $\{m=2l+1,\ k=2r+1\}$, we have

$$\begin{aligned}
D^-_{2n+1}u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1}\Big[2(p-n)v_{2p+1}^{(2n+1)}\partial_s u_{k+2(p-n)}^{(m)} \\
&+ (k-m+2(p-n))(\partial_s v_{2p+1}^{(2n+1)})u_{k+2(p-n)}^{(m)}\Big] \\
&+ 2(-1)^k\sum_{p=0}^{n}v_{2p}^{(2n+1)}u_{k+2(p-n)-1}^{(m)}, \\
D^-_{2n}u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1}\Big[2(p-n)v_{2p}^{(2n)}\partial_s u_{k+2(p-n)}^{(m)} \\
&+ (k-m+2(p-n))(\partial_s v_{2p}^{(2n)})u_{k+2(p-n)}^{(m)} \\
&+ 2(-1)^k v_{2p+1}^{(2n)}u_{k+2(p-n)+1}^{(m)}\Big], \\
D^+_{2n}u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n}\Big[2(n-p)u_{2p}^{(2n)}\partial_s u_{k+2(n-p)}^{(m)} \\
&+ (k-m+2(n-p))(\partial_s u_{2p}^{(2n)})u_{k+2(n-p)}^{(m)}\Big] \\
&+ 2(-1)^k\sum_{p=0}^{n-1}u_{2p+1}^{(2n)}u_{k+2(n-p)-1}^{(m)}, \\
D^+_{2n+1}v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n}\Big[2(n-p)u_{2p+1}^{(2n+1)}\partial_s v_{k+2(p-n)}^{(m)} \\
&- (k-m+2(p-n))(\partial_s u_{2p+1}^{(2n+1)})v_{k+2(p-n)}^{(m)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2(-1)^k u_{2p}^{(2n+1)} v_{k-1+2(p-n)}^{(m)}\Big], \\
D_{2n}^+ v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n} \Big[2(n-p) u_{2p}^{(2n)} \partial_s v_{k+2(p-n)}^{(m)} \\
&- (k-m+2(p-n))(\partial_s u_{2p}^{(2n)}) v_{k+2(p-n)}^{(m)} \Big] \\
&+ 2(-1)^k \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}^{(2n)} v_{k+1+2(p-n)}^{(m)}, \\
D_{2n}^- v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} \Big[2(p-n) v_{2p}^{(2n)} \partial_s v_{k+2(n-p)}^{(m)} \\
&- (k-m+2(n-p))(\partial_s v_{2p}^{(2n)}) v_{k+2(n-p)}^{(m)} \\
&+ 2(-1)^k v_{2p+1}^{(2n)} v_{k+2(n-p)-1}^{(m)} \Big].
\end{aligned} \tag{40}
$$

For $\{m = 2l,\ k = 2r+1\}$ or $\{m = 2l+1,\ k = 2r\}$, we have

$$
\begin{aligned}
D_n^- u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{m(p+n)} \Big[(p-n) v_p^{(n)} \partial_s u_{k+p-n}^{(m)} \\
&+ (k+p-n-m)(\partial_s v_p^{(n)}) u_{k+p-n}^{(m)} \Big], \\
D_{2n}^+ u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{2n} (-1)^{mp} \Big[(2n-p) u_p^{(2n)} \partial_s u_{k-p+2n}^{(m)} \\
&+ (k-p+2n-m)(\partial_s u_p^{(2n)}) u_{k-p+2n}^{(m)} \Big], \\
D_n^+ v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{m(p+n)} \Big[(n-p) u_p^{(n)} \partial_s v_{k+p-n}^{(m)} \\
&- (k+p-n-m)(\partial_s u_p^{(n)}) v_{k+p-n}^{(m)} \Big], \\
D_{2n}^- v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^{mp} \Big[(p-2n) v_p^{(2n)} \partial_s v_{k-p+2n}^{(m)} \\
&- (k-p+2n-m)(\partial_s v_p^{(2n)}) v_{k-p+2n}^{(m)} \Big],
\end{aligned} \tag{41}
$$

and also

$$
\begin{aligned}
D^+_{2n+1}u^{(2m)}_{2k} &= 2\sum_{p=0}^{n}\Big[(n-p)u^{(2n+1)}_{2p+1}\partial_s u^{(2m)}_{2(k-p+n)} \\
&+ (k-p+n-m)(\partial_s u^{(2n+1)}_{2p+1})u^{(2m)}_{2(k-p+n)} \\
&+ u^{(2n+1)}_{2p}u^{(2m)}_{2(k-p+n)+1}\Big], \\
D^+_{2n+1}u^{(2m+1)}_{2k+1} &= 2\sum_{p=1}^{k}\Big[pu^{(2n+1)}_{2(p+n)+1}\partial_s u^{(2m+1)}_{2(k-p)+1} \\
&+ (m+p-k)(\partial_s u^{(2n+1)}_{2(p+n)+1})u^{(2m+1)}_{2(k-p)+1}\Big] \\
&+ 2\sum_{p=0}^{k}u^{(2n+1)}_{2(p+n+1)}u^{(2m+1)}_{2(k-p)}, \\
D^+_{2n+1}u^{(2m+1)}_{2k} &= \sum_{p=1}^{2k}(-1)^p\Big[pu^{(2n+1)}_{p+2n+1}\partial_s u^{(2m+1)}_{2k-p} \\
&+ (2(m-k)+p+1)(\partial_s u^{(2n+1)}_{p+2n+1})u^{(2m+1)}_{2k-p}\Big], \\
D^+_{2n+1}u^{(2m)}_{2k+1} &= \sum_{p=0}^{2n+1}\Big[(2n-p+1)u^{(2n+1)}_{p}\partial_s u^{(2m)}_{2(k+n+1)-p} \\
&+ (2(k+n-m+1)-p)(\partial_s u^{(2n+1)}_{p})u^{(2m)}_{2(k+n+1)-p}\Big], \\
D^-_{2n+1}v^{(2m)}_{2k} &= 2\sum_{p=0}^{n-1}\Big[(p-n)v^{(2n+1)}_{2p+1}\partial_s v^{(2m)}_{2(k-p+n)} \\
&- (k-p+n-m)(\partial_s v^{(2n+1)}_{2p+1})v^{(2m)}_{2(k-p+n)}\Big] \\
&+ 2\sum_{p=0}^{n}v^{(2n+1)}_{2p}v^{(2m)}_{2(k-p+n)+1}, \\
D^-_{2n+1}v^{(2m+1)}_{2k+1} &= 2\sum_{p=0}^{k}\Big[-pv^{(2n+1)}_{2(p+n)+1}\partial_s v^{(2m+1)}_{2(k-p)+1} \\
&+ (k-p-m)\partial_s v^{(2n+1)}_{2(p+n)+1})v^{(2m+1)}_{2(k-p)+1} \\
&+ v^{(2n+1)}_{2(p+n+1)}v^{(2m+1)}_{2(k-p)}\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^-_{2n+1}v^{(2m+1)}_{2k} &= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\Big[-pv^{(2n+1)}_{p+2n+1}\partial_s v^{(2m+1)}_{2k-p} \\
&- (2(m-k)+p+1)(\partial_s v^{(2n+1)}_{p+2n+1})v^{(2m+1)}_{2k-p}\Big], \\
D^-_{2n+1}v^{(2m)}_{2k+1} &= \sum_{p=0}^{2n}\Big[-(2n-p+1)v^{(2n+1)}_p\partial_s v^{(2m)}_{2(k+n+1)-p} \\
&- (2(k+n-m+1)-p)(\partial_s v^{(2n+1)}_p)v^{(2m)}_{2(k+n+1)-p}\Big], \quad (42)
\end{aligned}
$$

where all the fields $\{u^{(m)}_k,\ v^{(m)}_k\}$ with $k<0$ must be set equal to zero in the right-hand sides. Flows (40–42) thus derived are said to constitute the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy. The corresponding Lax representation is constructed in Sec. 3.3.

3.2 The dispersionless N=(1|1) 2DTL equation and its bosonic symmetries

The dispersionless limits of N=(1|1) 2DTL equation (26) and of its bosonic symmetries (30) can be easily obtained using Eqs. (31–36). We respectively obtain

$$
D^+_1D^-_1\ln v_0 = 2\partial_s v_0 \quad (43)
$$

and

$$
\begin{aligned}
D^{\pm}_{2n}v_0 &= v_0\partial_s u^{(2n)\pm}_{2n}, \quad u^{(2n)\pm}_{0,j}=1, \\
\mp D^{\mp}_1 u^{(2n)\pm}_{2k+1} &= v_0\partial_s u^{(2n)\pm}_{2k} + 2(n-k)(\partial_s v_0)u^{(2n)\pm}_{2k}, \\
\pm D^{\mp}_1 u^{(2n)\pm}_{2k} &= 2v_0 u^{(2n)\pm}_{2k-1}. \quad (44)
\end{aligned}
$$

Eliminating $u^{(2n)\pm}_{2k+1}$ from system of equations (44), we finally obtain a recursive system of equations for the generation of bosonic symmetries of dispersionless N=(1|1) 2DTL equation (43)

$$
\begin{aligned}
D^{\pm}_{2n}v_0 &= v_0\partial_s u^{(2n)\pm}_{2n}, \quad u^{(2n)\pm}_{0,j}=1, \\
-D^{\mp}_1 u^{(2n)\pm}_{2k} &= 2v_0(D^{\mp}_1)^{-1}\Big[v_0\partial_s u^{(2n)\pm}_{2(k-1)} + 2(n-k+1)(\partial_s v_0)u^{(2n)\pm}_{2(k-1)}\Big]. \quad (45)
\end{aligned}
$$

We note that symmetries of the bosonic dispersionless 2DTL equation were found in [32] (also see [26]) by solving the corresponding sufficiently complicated symmetry equation.

3.3 Lax representation

In Sec. 3.1, we constructed flows (40–42) of the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy. We now find the corresponding Lax representation. Because Lax representation (15) of the N=(1|1) 2DTL hierarchy can be expressed in terms of generalized graded bracket (3), it is natural to expect that to derive its semiclassical limit, the corresponding dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy, it would suffice to replace all occurrences of this bracket with a certain Poisson superbracket and the operators with their symbols defined on the corresponding phase space.

Our immediate problem is to model the phase space and the Poisson superbracket starting from certain properties with which they must be endowed. Recalling that the Lax operators of the N=(1|1) 2DTL hierarchy, being defined on the space of operators graded by two different Z_2-gradings (8) and (10), have only one diagonal Z_2-grading (11), we can assume that the phase space inherits these properties. With the Z_2-grading $d_{e^{\partial}} = 1,\ d_{e^{2\partial}} = 0$ of the lattice shift operator $e^{l\partial}$ taken into account, (10), we assume that its counterpart on the phase space is given by two coordinates, the Grassmann coordinate π (with $\pi^2 = 0$) and the bosonic coordinate p, via

$$e^{\partial} \ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\,\pi, \quad e^{2\partial} \ \rightarrow\ p. \tag{46}$$

Although the coordinate π is Grassmann, it must have a property, not typical of Grassmann coordinates, to commute with not only bosonic but also fermionic fields of the hierarchy, as follows from the continuum limit of relation (9).

It is obvious that in addition to the coordinates π and p, the phase space must include a continuum "lattice" coordinate s, Eq. (32). The resulting phase superspace $\{\pi,\ p,\ s\}$ of the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy contains the phase space $\{p,\ s\}$ of the dispersionless 2DTL hierarchy as a subspace.

Having established the coordinates on the phase space, we can construct the Poisson superbracket for them. Recalling that the Poisson superbracket must agree with the superalgebra of the Z_2-graded operators $\{\sqrt{\hbar}e^{\partial},\ e^{2\partial},\ \hbar j\}$, to which the phase superspace coordinates $\{\pi,\ p,\ s\}$ correspond, we can find these superbrackets relatively easily. We here give the Poisson superbrackets between two arbitrary functions $\mathbb{F}_{1,2} \equiv \mathbb{F}_{1,2}(\pi, p, s)$ on the phase space obtained as explained above,

$$\begin{aligned} \Big\{\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2\Big\} = 2p\ \Big(&\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial p}\ \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial s}\ \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial p} + \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \pi}\ \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \pi}\Big) \\ &+ \pi\ \Big(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \pi}\ \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial s}\ \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \pi}\Big). \end{aligned} \tag{47}$$

We note that after the transition to the new basis $\{\widetilde{s}, \widetilde{p}, \widetilde{\pi}\}$ in the phase space given by the formulas

$$\begin{aligned} &\widetilde{s} := \frac{s}{2}, \quad \widetilde{p} := \ln p, \quad \widetilde{\pi} := \frac{\pi}{\sqrt{2p}}, \\ &s := 2\widetilde{s}, \quad p := e^{\widetilde{p}}, \quad \pi := \sqrt{2}\widetilde{\pi}e^{\frac{\widetilde{p}}{2}}, \end{aligned} \tag{48}$$

Poisson superbrackets (47) become

$$\Big\{\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2\Big\} = \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \widetilde{p}}\ \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \widetilde{s}} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \widetilde{s}}\ \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \widetilde{p}} + \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \widetilde{\pi}}\ \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \widetilde{\pi}}, \tag{49}$$

which corresponds to the canonical orthosymplectic structure of the phase superspace.

We now proceed to the next stage of deriving the Lax representation of the dispersionless $N{=}(1|1)$ 2DTL hierarchy. Heuristic formulas for the symbols $\mathcal{L}^{\pm}$ and $(\mathcal{L}^{\pm})^n_*$ of the Lax operators $L^{\pm}$ (14) and of the composite operators $(L^{\pm})^n_*$ (16–17) are

$$\begin{gathered} L^{\pm}\ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\ \mathcal{L}^{\pm}, \\ \mathcal{L}^{+} = \sum_{k=0}^{\infty}(u_{2k+1} + u_{2k}\pi)p^{-k}, \qquad \mathcal{L}^{-} = \sum_{k=0}^{\infty}(v_{2k-1} + v_{2k}\pi)p^{k-1} \end{gathered} \tag{50}$$

and

$$(L^{\pm})^{2m}_*\ \rightarrow\ (\mathcal{L}^{\pm})^{2m}_*, \quad (L^{\pm})^{2m+1}_*\ \rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\ (\mathcal{L}^{\pm})^{2m+1}_*,$$

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}^+)^{2m}_* \quad &:= \sum_{k=0}^{\infty}(u^{(2m)}_{2k} + u^{(2m)}_{2k-1}\pi)p^{m-k}, \\
(\mathcal{L}^-)^{2m}_* \quad &:= \sum_{k=0}^{\infty}(v^{(2m)}_{2k} + v^{(2m)}_{2k+1}\pi)p^{k-m}, \\
(\mathcal{L}^+)^{2m+1}_* &:= \sum_{k=0}^{\infty}(u^{(2m+1)}_{2k+1} + u^{(2m+1)}_{2k}\pi)p^{m-k}, \\
(\mathcal{L}^-)^{2m+1}_* &:= \sum_{k=0}^{\infty}(v^{(2m+1)}_{2k-1} + v^{(2m+1)}_{2k}\pi)p^{k-m-1},
\end{aligned}
\tag{51}
$$

respectively. By definition, all the fields $\{u^{(m)}_k,\ v^{(m)}_k\}$ with $k<0$ must be set equal to zero. In obtaining these expressions we have used substitutions (36) and (46). We note that the above symbols are not commutative in general,

$$
(\mathcal{L}^\alpha)^k_*(\mathcal{L}^\beta)^m_* = (-1)^{km}((\mathcal{L}^\beta)^m_*)^{*(k)}((\mathcal{L}^\alpha)^k_*)^{*(m)}, \quad \alpha,\beta=+,-, \tag{52}
$$

which is related to the atypical property of the Grassmann coordinate π noted above (see the remark after Eq. (46)).

In Lax representations (15) and (19) for the N=(1|1) 2DTL hierarchy and in defining relations (16), we finally replace the Lax operators with their symbols (50–51) and the generalized graded bracket (3) with Poisson superbracket (47) in accordance with

$$
\Big[\ .\ ,\ .\ \Big\} \ \rightarrow\ \hbar\ \Big\{\ .\ ,\ .\ \Big\} \tag{53}
$$

and then perform substitution (34) and take limit (33). This gives the expressions

$$
D^{\pm}_n\mathcal{L}^\alpha = \mp\alpha(-1)^n\Big\{(((\mathcal{L}^{\pm})^n_*)_{-\alpha})^*, \mathcal{L}^\alpha\Big\}, \quad n\in\mathbb{N}, \quad \alpha=+,-, \tag{54}
$$

$$
D^{\pm}_n(\mathcal{L}^\alpha)^m_* = \mp\alpha(-1)^{nm}\Big\{(((\mathcal{L}^{\pm})^n_*)_{-\alpha})^{*(m)}, (\mathcal{L}^\alpha)^m_*\Big\}, \quad n,m\in\mathbb{N}, \tag{55}
$$

$$
(\mathcal{L}^\alpha)^{2m}_* := \Big(\ \frac{1}{2}\ \Big\{(\mathcal{L}^\alpha)^*, \mathcal{L}^\alpha\Big\}\ \Big)^m, \quad (\mathcal{L}^\alpha)^{2m+1}_* := \mathcal{L}^\alpha\ (\mathcal{L}^\alpha)^{2m}_* \tag{56}
$$

for the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy. Direct calculations confirm that obtained relations (55–56) correctly reproduce dispersionless flows (38–42) and are therefore the sought Lax representation for the dispersionless N=(1|1) 2DTL hierarchy.

4 Conclusions

We have proposed new bracket operation (3) with the properties in Eqs. (4–6) on the space of graded operators with an involution; this bracket generalizes the graded commutator in superalgebras. We then obtained a new form of Lax representation (15–16) and (19) for the two-dimensional N=(1|1) supersymmetric Toda lattice hierarchy in terms of the generalized graded bracket. We next used this representation to construct semiclassical limit (33–36) of this hierarchy — the dispersionless N=(1|1) Toda hierarchy in Eqs. (40–42) — and its Lax representation (50–51), (54–56) on the graded phase superspace with Poisson bracket (47). Finally, we established bosonic symmetries (45) of dispersionless N=(1|1) supersymmetric Toda equation (43).

One of us (V. K.) first became acquainted with A. A. Logunov while still a second-year student in the Physics Department of Moscow State University (1956) and over the decades since then have always felt his firm support in matters both within and outside science. All our best wishes, dear Anatolii Alekseevich!

References

[1] N.N. Bogoliubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak and I.T. Todorov, General Principles of Quantum Field Theory (in Russian), Nauka, Moscow (1987); English transl., Kluwer, Dordrecht (1990).

[2] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, *Adv. Stud. in Pure Math.* **4** (1984) 1.

[3] k. Ikeda, *A supersymmetric extension of the Toda lattice hierarchy*, *Lett. Math. Phys.* 14 (1987) 321; *The super-Toda lattice hierarchy*, *RIMS* **25** (1989) 829.

[4] k. Takasaki, *Differential algebras and D-modules in super Toda lattice hierarchy*, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990) 229.

[5] A.N. Leznov and A.S. Sorin, *Two-dimensional superintegrable mappings and integrable hierarchies in the* $(2|2)$ *superspace*, *Phys. Lett.* **B389** (1996) 494, hep-th/9608166; *Integrable mappings and hierarchies in the* $(2|2)$ *superspace*, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B56** (1997) 258.

[6] O. Lechtenfeld and A. Sorin, *Fermionic flows and tau function of the* $N = (1|1)$ *superconformal Toda lattice hierarchy*, *Nucl. Phys.* **B557** (1999) 535, solv-int/9810009; *Hidden* $N = (2|2)$ *supersymmetry of the* $N = (1|1)$ *supersymmetric Toda lattice hierarchy*, *J. Nonlinear Math. Phys.* **8** (2001) 183, nlin.SI/0007009.

[7] V.G. Kadyshevsky and A.S. Sorin, *Supersymmetric Toda lattice hierarchies*, in *Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories* (Eds. H. Aratyn and A.S. Sorin), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London, (2001) 289-316, nlin.SI/0011009.

[8] M.V. Saveliev and P. Sorba, *Solution of the Cauchy problem for a continuous limit of the Toda lattice and its superextension*, *Lett. Math. Phys.* **22** (1991) 119.

[9] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov, *Quasi-potential approach and the expansion in relativistic spherical functions*, *Nuovo Cimento* **A55** (1968) 233.

[10] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov, *Relativistic two-body problem and finite-difference calculus*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **9** (1969) 212.

[11] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov, *The Schroedinger difference equation for two relativistic particles in the simplest cases*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **9** (1969) 462.

[12] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and M. Freeman, *Hypergeometric difference equations and Coulomb relativistic problem*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **9** (1969) 646.

[13] C. Itzykson, V.G. Kadyshevsky and I.T. Todorov, *Three-dimensional formulation of the relativistic two-body problem and infinite-component wave equations*, *Phys. Rev.* **D1** (1970) 2823.

[14] V.G. Kadyshevsky, *Quantum field theory and the momentum space of a constant curvature*, In the book *"Problems of Theoretical Physics"* dedicated to the memory of I.E. Tamm, M., "Nauka", (1972) 52.

[15] V.G. Kadyshevsky, *Fundamental length as a new scale in quantum field theory*, *Proceedings of the International Conference on High Energy Physics and Elementary Particles*, Warsaw, (1975) 305.

[16] D.V. Fursaev and V.G. Kadyshevsky, *Difference equations and gauge symmetry*, *CRM Proceedings and Lecture Notes* **9** (1996) 125.

[17] K. Takasaki and T. Takebe, *SDIFF(2) Toda equation – hierarchy, tau functions and symmetries*, *Lett. Math. Phys.* **23** (1991) 205, hep-th/9112042.

[18] K. Takasaki and T. Takebe, *Quasi–classical limit of Toda hierarchy and W–infinity symmetries*, *Lett. Math. Phys.* **28** (1993) 165, hep-th/9301070.

[19] K. Takasaki and T. Takebe, *Integrable hierarchies and dispersionless limit*, *Rev. Math. Phys.* **7** (1995) 743, hep-th/9405096.

[20] C.P. Boyer and J.D. Finley, *Killing vectors in self–dual Euclidean Einstein spaces*, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1126.

[21] I. Bakas, *The structure of the W_∞ algebra*, *Commun. Math. Lett.* **134** (1990) 487.

[22] Q-Han Park, *Extended conformal symmetries in real heavens*, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 429.

[23] R. S. Ward, *Einstein–Weyl spaces and $SU(\infty)$ Toda fields*, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) L95.

[24] I. Krichever, *Dispersionless Lax equations and topological minimal models*, *Commun. Math. Phys.* **143** (1992) 415.

[25] F. Delduc, M.V. Saveliev and P. Sorba, *Continuum Lie algebras and the scalar–flat Kähler surfaces*, *Phys. Lett.* **B277** (1992) 411.

[26] J. Hoppe and Q-Han Park, *Infinite charge algebra of gravitational instantons*, *Phys. Lett.* **B231** (1994) 333, hep-th/9312020.

[27] K. Takasaki, *Dispersionless Toda hierarchy and two-dimensional string theory*, *Commun. Math. Phys.* **170** (1995) 101, hep-th/9403190.

[28] L. Bonora and C.S. Xiong, *Two–matrix model and* $c = 1$ *string theory*, *Phys. Lett.* **B347** (1995) 41, hep-th/9405004.

[29] D. M. Calderbank and P. Tod, *Einstein metrics, hypercomplex structures and the Toda field equation*, *Differ. Geom. Appl.* **14** (2001) 199, math.DG/9911121.

[30] V. Kazakov, I. Kostov and D. Kutasov, *A matrix model for the two dimensional black hole*, *Nucl. Phys.* **B622** (2002) 141, hep-th/0101011.

[31] S. Alexandrov and V. Kazakov, *Correlators in 2D string theory with vortex condensation*, *Nucl. Phys.* **B610** (2001) 77, hep-th/0104094.

[32] D.B. Fairlie and A.N. Leznov, *Infinite series solutions of the symmetry equation for the 1+2 dimensional continuous Toda chain*, hep-th/9512217.

Theoretical and Mathematical Physics[*]
132 *(2002) 1080, nlin.SI/0206044*

N=(1|1) supersymmetric dispersionless Toda lattice hierarchy

V.G. Kadyshevsky[(a)] and A.S. Sorin[(b)]

Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics,
Joint Institute for Nuclear Research,
141980 Dubna, Moscow Region, Russia
[(a)] *Email: kadyshev@jinr.ru*
[(b)] Email: sorin@thsun1.jinr.ru

Abstract

Generalizing the graded commutator in superalgebras, we propose a new bracket operation on the space of graded operators with an involution. We study properties of this operation and show that the Lax representation of the two-dimensional N=(1|1) supersymmetric Toda lattice hierarchy can be realized via the generalized bracket operation; this is important in constructing the semiclassical (continuum) limit of this hierarchy. We construct the continuum limit of the N=(1|1) Toda lattice hierarchy, the dispersionless N=(1|1) Toda hierarchy. In this limit, we obtain the Lax representation, with the generalized graded bracket becoming the corresponding Poisson bracket on the graded phase superspace. We find bosonic symmetries of the dispersionless N=(1|1) supersymmetric Toda equation.

[*]Translated from Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika **132** (2002) 222.

N=(1|1) суперсимметричная бездисперсионная решеточная иерархия Тоды

В.Г. Кадышевский[a] и А.С. Сорин[b]

Лаборатория Теоретической Физики им. Н.Н. Боголюбова,
Объединенный Институт Ядерных Исследований,
141980 Дубна, Московская область, Россия
[a] *e-mail: kadyshev@jinr.ru*
[b] *e-mail: sorin@thsun1.jinr.ru*

Аннотация

Предложена скобочная операция на пространстве градуированных операторов с инволюцией, обобщающая градуированный коммутатор супералгебр. Показано, что представление Лакса для двумерной $N = (1|1)$ суперсимметричной решеточной иерархии Тоды может быть реализовано как обобщенная скобочная операция, что важно для построения квазиклассического (непрерывного) предела этой иерархии. Построен непрерывный предел $N = (1|1)$ решеточной иерархии Тоды — бездисперсионная $N = (1|1)$ иерархия Тоды, и получено его представление Лакса, где обобщенная градуированная скобка переходит в соответствующую скобку Пуассона на градуированном фазовом суперпространстве. Найдены бозонные симметрии бездисперсионного $N = (1|1)$ суперсимметричного уравнения Тоды.

Посвящается 75–летию академика Анатолия Алексеевича Логунова

1 введение

В последние несколько десятилетий квантовая теория поля (КТП), приняв на вооружение эффективные математические методы, превратилась в теорию, удовлетворяющую самым строгим математическим требованиям [1]. После возникновения суперсимметричных КТП особое внимание исследователей привлекли многочисленные проблемы, которые, с одной стороны, представляют интерес для математической физики, а, с другой стороны, обещают важные физические приложения.

В настоящей работе будет рассмотрено интегрируемое $N = (1|1)$ суперсимметричное обобщение решеточной двумерной бозонной иерархии Тоды (2DTL иерархии) [2], предложенное в [3, 4]. Оно представляет собой бесконечную систему эволюционных (по двум бозонным и двум фермионным бесконечным "башням" времен) уравнений (потоков) для бесконечного набора решеточных бозонных и фермионных полей и содержит как подсистему $N = (1|1)$ суперсимметричное интегрируемое обобщение 2DTL уравнения, обозначаемое в дальнейшем посредством $N = (1|1)$ 2DTL.

Позднее в работах [5, 6, 7] были построены две новые бесконечные серии фермионных потоков $N = (1|1)$ 2DTL иерархии и, как следствие, было установлено, что эта иерархия, в действительности, обладает более высокой симметрией, а именно $N = (2|2)$ суперсимметрией. Эти потоки, совместно с ранее известными бозонными потоками $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, являются симметриями $N = (1|1)$ 2DTL уравнения [5, 6, 7]. Непрерывный предел по шагу решетки последнего уравнения [8] представляет собой трехмерное нелинейное уравнение, называемое непрерывным или бездисперсионным $N = (1|1)$ 2DTL уравнением; в [8] также рассматривалось решение соответствующей задачи Коши.

Хотя $N = (1|1)$ 2DTL иерархия и бездисперсионное $N = (1|1)$ 2DTL уравнение известны достаточно давно, *проблема построения непрерывного (квазиклассического) предела по шагу решетки, играющего здесь роль постоянной Планка, для всех потоков $N = (1|1)$ 2DTL иерархии является еще не решенной и достаточно сложной задачей*[1]. Кроме чисто академического значения этой проблемы, интерес к

[1] В этой связи заметим, что аналогичные задачи для дифференциально–разностных уравнений рассматривались в цикле работ [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16].

ее решению связан с рядом важных физических и математических приложений. Речь идет, в частности, о квазиклассическом пределе бозонного прообраза $N = (1|1)$ 2DTL иерархии — бездисперсионной 2DTL иерархии [17], представляющей собой объединение потоков 2DTL иерархии, возникающих в лидирующем приближении квазиклассического разложения, построенном в работе [18] (см. также обзор [19]). В качестве иллюстрации, можно привести перечень возможных приложений бездисперсионной 2DTL иерархии:
1. построение ряда самодуальных вакуумных метрик и метрик Эйнштейна–Вейля;
2. теории твисторов;
3. двумерной конформной и топологической теории поля;
4. двумерной теории струн
(см., также [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31] и приведенные там ссылки).

Имея в виду глубокую связь между 2DTL и $N = (1|1)$ 2DTL иерархиями, представляется естественным полагать, что и бездисперсионная $N = (1|1)$ суперсимметричная 2DTL иерархия найдет аналогичные приложения в суперсимметричных обобщениях перечисленных выше теорий. *Последнее обстоятельство явилось стимулом для построения бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии в данной работе.*

Далее мы хотели бы особо подчеркнуть, что существующий общий алгоритм построения квазиклассических асимптотик, использованный в работе [18] для 2DTL иерархии, встречает ряд как формальных, так и неформальных препятствий при прямолинейном распространении на случай $N = (1|1)$ 2DTL иерархии. Так, общеизвестно, что в квазиклассическом пределе все операторы переходят в их символы, задаваемые на соответствующем фазовом пространстве, а (анти)коммутаторы в стандартных представлениях Лакса заменяются соответствующими скобками Пуассона. Что же касается предложенного в работе [3] представления Лакса для $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, то оно не имеет (анти)коммутаторного вида. Поэтому буквальное применение вышеприведенного качественного рецепта перехода к квазиклассике кажется затруднительным.

Другой принципиально важной, качественно новой чертой $N = (1|1)$ 2DTL иерархии по сравнению с ее бозонным прообразом, усложняющей рассмотрение, является то, что операторы, входящие

в ее представление Лакса, задаются на пространстве с двумя Z_2–градуировками, обладая, однако, только одной диагональной Z_2–градуировкой. По этой причине в общем случае даже в квазиклассическом пределе нельзя ожидать коммутативности символов этих операторов.

К сказанному можно также добавить и возможные усложнения, связанные с тем, что фермионные и бозонные поля $N = (1|1)$ 2DTL иерархии могут иметь не совпадающие квазиклассические асимптотики, которые необходимо задать самосогласованно. Аналогичная ситуация имеет место для фермионных и бозонных времен этой иерархии, однако последние можно легко согласовать, дополнительно привлекая соображения размерности.

Совсем недавно наметился определенный прогресс на пути построения квазиклассического предела $N = (1|1)$ 2DTL иерархии. Так, в работе [7] было обнаружено, что представление Лакса для этой иерархии может быть приведено к коммутаторной форме (уравнение (39) в [7]) посредством введения ряда новых вспомогательных фермионных постоянных (детали см. [7]). Хотя получаемое таким способом коммутаторное представление, на первый взгляд, кажется искусственным, в действительности, в нем закодирована важная новая обобщенная градуированная скобочная операция, которая может быть определена в достаточно общих терминах, чтобы иметь широкий спектр приложений. *Мы вводим ее в рассмотрение в настоящей работе и используем для решения изучаемой здесь проблемы.*

Оказывается, что именно в терминах данной скобочной операции могут быть выражены все основные соотношения, определяющие $N = (1|1)$ 2DTL иерархию, и для этого не требуется введение никаких вспомогательных объектов, типа упомянутых выше фермионных постоянных. Более того, в квазиклассическом пределе именно эта скобочная операция заменяется соответствующей суперскобкой Пуассона на фазовом суперпространстве. Тем самым задается представление Лакса для бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии.

Структура данной работы такова. В параграфе 2 мы вводим обобщенную градуированную скобочную операцию на пространстве градуированных операторов с инволюцией, обобщающую градуированный коммутатор для супералгебр, описываем ее свойства и приводим соответствующие обобщенные тождества Якоби. Затем мы получаем

представление Лакса $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, а также все основные определяющие его соотношения в терминах обобщенной градуированной скобки. Мы приводим далее явные выражения для потоков $N = (1|1)$ 2DTL иерархии и бозонных симметрий $N = (1|1)$ 2DTL уравнения, которые впоследствии используются в параграфе 3 для получения их бездисперсионных аналогов. В параграфе 3 также определяется квазиклассический предел $N = (1|1)$ 2DTL иерархии и постулируется соответствующее асимптотическое поведение фермионных и бозонных полей, параметризующих операторы Лакса.

Затем с помощью этих данных мы вычисляем асимптотическое поведение всех композитных операторов, входящих в представление Лакса и соответствующие ему полевые эволюционные уравнения. Dалее мы получаем непротиворечивые, регулярные лидирующие члены квазиклассического разложения этих эволюционных уравнений, являющихся, по определению, потоками бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии. Тем самым апостериори демонстрируется самосогласованность наших постулатов, лежащих в основе всех проведенных вычислений.

Следующий шаг — моделирование суперскобки Пуассона на фазовом суперпространстве, представляющем собой фазовое пространство бездисперсионной 2DTL иерархии, расширенное одной грассмановой координатой. И, наконец, заменяя операторы Лакса на их символы, а обобщенную градуированную скобку на указанную суперскобку Пуассона в представлении Лакса для $N = (1|1)$ 2DTL иерархии и во всех определяющих его соотношениях, мы убеждаемся прямым вычислением, что получаемое таким способом операторное представление правильно воспроизводит построенные нами ранее потоки бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, т.е. является искомым представлением Лакса для последней иерархии. В параграфе 4 мы кратко резюмируем основные результаты, полученные в работе.

2 N=(1|1) 2DTL иерархия

В этом параграфе вводится новая градуированная скобочная операция и на этой основе предлагается новая форма для представления

Лакса $N = (1|1)$ 2DTL иерархии.

2.1 Обобщенные градуированные скобки

Рассмотрим пространство операторов $\mathbb{O}_k$ с градуировкой $d_{\mathbb{O}_k}$ ($d_{\mathbb{O}_k} \in \mathbb{Z}$),

$$d_{\mathbb{O}_1\mathbb{O}_2} = d_{\mathbb{O}_1} + d_{\mathbb{O}_2}, \tag{1}$$

и инволюцией $*$,

$$\mathbb{O}_k^{*(2)} = \mathbb{O}_k, \tag{2}$$

где здесь и в дальнейшем ${\mathbb{O}_k}^{*(m)}$ обозначает m–кратное действие инволюции $*$ на оператор $\mathbb{O}_k$. На этом пространстве можно определить обобщенную градуированную скобочную операцию $[..., ...\}$:

$$\Big[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\Big\} := \mathbb{O}_1\mathbb{O}_2 - (-1)^{d_{\mathbb{O}_1}d_{\mathbb{O}_2}}\ {\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}\ {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \tag{3}$$

со следующими легко проверяемыми свойствами:

Симметрия

$$\Big[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\Big\} = (-1)^{d_{\mathbb{O}_1}d_{\mathbb{O}_2}+1}\Big[{\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}, {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}\Big\}, \tag{4}$$

Дифференцирование

$$\Big[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\mathbb{O}_3\Big\} = \Big[\mathbb{O}_1, \mathbb{O}_2\Big\}\mathbb{O}_3 + (-1)^{d_{\mathbb{O}_1}d_{\mathbb{O}_2}}\mathbb{O}_2^{*(d_{\mathbb{O}_1})}\Big[{\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \mathbb{O}_3\Big\}, \tag{5}$$

Тождества Якоби

$$\begin{aligned} &(-1)^{d_{\mathbb{O}_1}d_{\mathbb{O}_3}}\Big[\Big[{\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_3})}, \mathbb{O}_2\Big\}, {\mathbb{O}_3}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}\Big\} \\ &+ (-1)^{d_{\mathbb{O}_2}d_{\mathbb{O}_1}}\Big[\Big[{\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_1})}, \mathbb{O}_3\Big\}, {\mathbb{O}_1}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}\Big\} \\ &+ (-1)^{d_{\mathbb{O}_3}d_{\mathbb{O}_2}}\Big[\Big[{\mathbb{O}_3}^{*(d_{\mathbb{O}_2})}, \mathbb{O}_1\Big\}, {\mathbb{O}_2}^{*(d_{\mathbb{O}_3})}\Big\} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Соотношения (4–6) обобщают соответствующие свойства градуированного коммутатора суперbegin алгебр Ли. Мы хотели бы подчеркнуть, что в частном случае, когда инволюция $*$ (2) действует как тождественное преобразование, скобка (3) воспроизводит градуированный коммутатор супералгебр Ли. В случае же нетривиального действия инволюции эта скобка является нетривиальным обобщением последнего.

2.2 Представление Лакса и потоки

Мы начнем этот раздел с детализации пространства операторов, их градуировки и инволюции, имеющих отношение к рассматриваемой здесь $N = (1|1)$ 2DTL иерархии.

Эти операторы могут быть представлены в следующем общем виде:

$$\mathbb{O}_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{7}$$

где параметризующие их функции $f_{2k,j}^{(m)}$ $(f_{2k+1,j}^{(m)})$ являются Z_2–градуированными

$$d'_{f_{k,j}^{(m)}} = |k| \quad \text{по} \quad \text{модулю} \;\; 2 \tag{8}$$

бозонными (фермионными) решеточными полями ($j \in \mathbb{Z}$), а оператор $e^{l\partial}$ ($l \in \mathbb{Z}$) действует на эти поля как дискретный решеточный сдвиг

$$e^{l\partial} f_{k,j}^{(m)} \equiv f_{k,j+l}^{(m)} e^{l\partial} \tag{9}$$

и обладает другой Z_2–градуировкой

$$d_{e^{l\partial}} = |l| \quad \text{по} \quad \text{модулю} \;\; 2. \tag{10}$$

Операторы (7) допускают задание только одной диагональной Z_2–градуировки

$$d_{\mathbb{O}_m} = d'_{f_{k,j}^{(m)}} + d_{e^{(k-m)\partial}} = |m| \quad \text{по} \quad \text{модулю} \;\; 2 \tag{11}$$

и инволюции

$$\mathbb{O}_m^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}. \tag{12}$$

В дальнейшем нам также понадобятся проекции $(\mathbb{O}_m)_\pm$ операторов $\mathbb{O}_m$ (7), определяемые как

$$(\mathbb{O}_m)_+ = \sum_{k=m}^{\infty} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}, \quad (\mathbb{O}_m)_- = \sum_{k=-\infty}^{m-1} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}. \tag{13}$$

Операторы Лакса $L^{\pm}$ $N=(1|1)$ 2DTL иерархии принадлежат пространству операторов (7) [3, 7]

$$L^{+}=\sum_{k=0}^{\infty}u_{k,j}e^{(1-k)\partial}, \quad u_{0,j}=1, \quad L^{-}=\sum_{k=0}^{\infty}v_{k,j}e^{(k-1)\partial}, \quad v_{0,j}\neq 0 \tag{14}$$

и имеют градуировку $d_{L^{\pm}}=1$.

Теперь мы располагаем всеми необходимыми данными для того, чтобы выразить представление Лакса $N=(1|1)$ 2DTL иерархии в терминах скобочной операции (3) и тем самым придать ему очень простой вид:

$$D_{n}^{\pm}L^{\alpha}=\mp\alpha(-1)^{n}\Big[(((L^{\pm})_{*}^{n})_{-\alpha})^{*},L^{\alpha}\Big\}, \quad \alpha=+,-, \quad n\in\mathbb{N}, \tag{15}$$

где $D_{2n}^{\pm}$ ($D_{2n+1}^{\pm}$) – бозонные (фермионные) эволюционные производные.

Dля входящих в это представление композитных операторов $(L^{\pm})_{*}^{n}$ также могут быть получены весьма простые выражения в терминах операторов Лакса и скобочной операции (3)

$$(L^{\alpha})_{*}^{2n}:=\Big(\ \frac{1}{2}\ \Big[(L^{\alpha})^{*},(L^{\alpha})\Big\}\ \Big)^{n}, \quad (L^{\alpha})_{*}^{2m+1}:=L^{\alpha}\ (L^{\alpha})_{*}^{2n}. \tag{16}$$

Как и операторы Лакса $L^{\pm}$, операторы $(L^{\pm})_{*}^{n}$ принадлежат пространству операторов (7) и могут быть представлены в следующем виде:

$$(L^{+})_{*}^{m}:=\sum_{k=0}^{\infty}u_{k,j}^{(m)}e^{(m-k)\partial}, \quad u_{0,j}^{(m)}=1, \quad (L^{-})_{*}^{m}:=\sum_{k=0}^{\infty}v_{k,j}^{(m)}e^{(k-m)\partial}, \tag{17}$$

где $u_{k,j}^{(m)}$ и $v_{k,j}^{(m)}$ ($u_{k,j}^{(1)}\equiv u_{k,j}$, $v_{k,j}^{(1)}\equiv v_{k,j}$) — функционалы исходных полей $\{u_{k,j},\ v_{k,j}\}$. Здесь важно отметить, что в представлении Лакса (15) Z_2–градуировка операторов $(L^{\pm})_{*}^{n}$ — $d_{(L^{\pm})_{*}^{2n}}=0$ и $d_{(L^{\pm})_{*}^{2n+1}}=1$ — согласована с другой Z_2–градуировкой $d'_{D_{2n}^{\pm}}=0$ и $d'_{D_{2n+1}^{\pm}}=1$, соответствующей статистике эволюционных производных $D_{n}^{\pm}$.

Используя скобочные свойства (4–6) и соотношения (16) как определения для $(L^{\pm})_{*}^{n}$, нетрудно получить полезные тождества

$$\begin{aligned}
&\Big[(L^{\alpha})_{*}^{2n},(L^{\alpha})_{*}^{2m}\Big\}=0,\\
&\Big[((L^{\alpha})_{*}^{2n})^{*},(L^{\alpha})_{*}^{2m+1}\Big\}=0, \quad \Big[(L^{\alpha})_{*}^{2n+1},(L^{\alpha})_{*}^{2m}\Big\}=0,\\
&\Big[((L^{\alpha})_{*}^{2n+1})^{*},(L^{\alpha})_{*}^{2m+1}\Big\}=2(L^{\alpha})_{*}^{2(n+m+1)}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Теперь, применяя (4–6) и (15–16), можно вывести уравнения движения для композитных операторов $(L^{\pm})^n_*$

$$D^{\pm}_n (L^{\alpha})^m_* = \mp\alpha(-1)^{nm}\Big[(((L^{\pm})^n_*)_{-\alpha})^{*(m)}, (L^{\alpha})^m_*\Big\}, \tag{19}$$

а также эволюционные уравнения для функционалов $\{u^{(m)}_{k,j},\ v^{(m)}_{k,j}\}$ (17), вытекающие из найденных уравнений (19):

$$\begin{aligned} D^{+}_n u^{(2m)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{n}(u^{(n)}_{p,j}u^{(2m)}_{k-p+n,j-p+n} \\ &- (-1)^{(p+n)(k-p+n)}u^{(n)}_{p,j-k+p-n+2m}u^{(2m)}_{k-p+n,j}), \\ D^{+}_{2n} u^{(2m+1)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{2n}((-1)^{p}u^{(2n)}_{p,j}u^{(2m+1)}_{k-p+2n,j-p+2n} \\ &- (-1)^{p(k-p)}u^{(2n)}_{p,j-k+p-2n+2m+1}u^{(2m+1)}_{k-p+2n,j}), \\ D^{+}_{2n+1} u^{(2m+1)}_{k,j} &= \sum_{p=1}^{k}((-1)^{p+1}u^{(2n+1)}_{p+2n+1,j}u^{(2m+1)}_{k-p,j-p} \\ &+ (-1)^{p(k-p)}u^{(2n+1)}_{p+2n+1,j-k+p+2m+1}u^{(2m+1)}_{k-p,j}), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} D^{-}_n u^{(m)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{n-1}((-1)^{(p+n)m}v^{(n)}_{p,j}u^{(m)}_{k+p-n,j+p-n} \\ &- (-1)^{(p+n)(k+p-n)}v^{(n)}_{p,j-k-p+n+m}u^{(m)}_{k+p-n,j}), \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} D^{+}_n v^{(m)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{n}((-1)^{(p+n)m}u^{(n)}_{p,j}v^{(m)}_{k+p-n,j-p+n} \\ &- (-1)^{(p+n)(k+p-n)}u^{(n)}_{p,j+k+p-n-m}v^{(m)}_{k+p-n,j}), \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} D^{-}_n v^{(2m)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{n-1}(v^{(n)}_{p,j}v^{(2m)}_{k-p+n,j+p-n} \\ &- (-1)^{(p+n)(k-p+n)}v^{(n)}_{p,j+k-p+n-2m}v^{(2m)}_{k-p+n,j}), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D^-_{2n} v^{(2m+1)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{2n-1} ((-1)^p v^{(2n)}_{p,j} v^{(2m+1)}_{k-p+2n,j+p-2n} \\
&- (-1)^{p(k-p)} v^{(2n)}_{p,j+k-p+2n-2m-1} v^{(2m+1)}_{k-p+2n,j}), \\
D^-_{2n+1} v^{(2m+1)}_{k,j} &= \sum_{p=0}^{k} ((-1)^{p+1} v^{(2n+1)}_{p+2n+1,j} v^{(2m+1)}_{k-p,j+p} \\
&+ (-1)^{p(k-p)} v^{(2n+1)}_{p+2n+1,j+k-p-2m-1} v^{(2m+1)}_{k-p,j}) \qquad (23)
\end{aligned}
$$

(в правых частях все поля $\{u^{(m)}_{k,j},\ v^{(m)}_{k,j}\}$ с $k<0$ должны быть положены равными нулю).

Представление Лакса (15) генерирует неабелеву алгебру потоков $N=(1|1)$ 2DTL иерархии

$$
[D^+_n\ ,\ D^-_l\} = [D^{\pm}_n\ ,\ D^{\pm}_{2l}] = 0, \quad \{D^{\pm}_{2n+1}\ ,\ D^{\pm}_{2l+1}\} = 2D^{\pm}_{2(n+l+1)}, \qquad (24)
$$

которая может быть реализована как

$$
D^{\pm}_{2n} = \partial^{\pm}_{2n}, \quad D^{\pm}_{2n+1} = \partial^{\pm}_{2n+1} + \sum_{l=1}^{\infty} t^{\pm}_{2l-1} \partial^{\pm}_{2(k+l)}, \quad \partial^{\pm}_n := \frac{\partial}{\partial t^{\pm}_n}, \qquad (25)
$$

где $t^{\pm}_{2n}$ $(t^{\pm}_{2n+1})$ – бозонные (фермионные) эволюционные времена. Непрерывный предел потоков (20–23) будет построен в параграфе 3.1 и ляжет в основу определения потоков бездисперсионной $N=(1|1)$ 2DTL иерархии.

2.3 бозонные симметрии N=(1|1) 2DTL уравнения

Суперсимметричное $N=(1|1)$ 2DTL уравнение

$$
D^+_1 D^-_1 \ln v_{0,j} = v_{0,j+1} - v_{0,j-1} \qquad (26)
$$

принадлежит системе уравнений (20–23). Оно вытекает из уравнения (21) при $\{n=m=k=1\}$

$$
D^-_1 u_{1,j} = -v_{0,j} - v_{0,j+1} \qquad (27)
$$

и уравнения (22) при $\{n=m=1, k=0\}$

$$
D^+_1 v_{0,j} = v_{0,j}(u_{1,j} - u_{1,j-1}) \qquad (28)
$$

после исключения поля $u_{1,j}$. Его бозонные симметрии $D^{\pm}_{2n}v_{0,j}$

$$\{D^+_1, D^{\pm}_{2n}\} = \{D^-_1, D^{\pm}_{2n}\} = 0 \tag{29}$$

были описаны в работах [5, 6, 7] в терминах следующей итеррационной процедуры:

$$\begin{aligned} D^{\pm}_{2n}v_{0,j} &= v_{0,j}(u^{(2n)\pm}_{2n,j} - u^{(2n)\pm}_{2n,j-1}), \quad u^{(2n)\pm}_{0,j} = 1, \\ \pm D^{\mp}_1 u^{(2n)\pm}_{k,j} &= v_{0,j}u^{(2n)\pm}_{k-1,j-1} + (-1)^k v_{0,j-k+2n+1}u^{(2n)\pm}_{k-1,j}, \end{aligned} \tag{30}$$

где функции $u^{(n)\pm}_{k,j}$ связаны с исходными функционалами $\{u^{(n)}_{k,j}, v^{(n)}_{k,j}\}$ следующим образом:

$$u^{(n)+}_{k,j} = u^{(n)}_{k,j}, \quad u^{(n)-}_{k,j} = \frac{v^{(n)}_{k,-j-1}}{\sum_{m=1}^{n-k} v_{0,k+m-n-j-1}} \tag{31}$$

(детали см. в [7]).

Непрерывный предел $N = (1|1)$ 2DTL уравнения (26) и его симметрий $D^{\pm}_{2n}v_{0,j}$ (30) будет получен в параграфе 3.2.

3 бездисперсионная N=(1|1) 2DTL иерархия

В этом параграфе строится непрерывный (квазиклассический) по шагу решетки предел $N = (1|1)$ 2DTL иерархии — бездисперсионная $N = (1|1)$ 2DTL иерархия, и конструируется соответствующее ему представление Лакса.

3.1 Квазиклассический предел

Потоки (20–23) $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, введеные в предыдущем параграфе, не содержат явную зависимость от размерных постоянных, а решетка с безразмерной координатой j ($j \in \mathbb{Z}$) имеет единичный шаг. Dля изучения непрерывного предела введем явно длину шага решетки. Поскольку этот параметр в дальнейшем будет играть роль постоянной

Планка, мы будем обозначать его как $\hbar$. Таким образом, вместо j возникает комбинация

$$\hbar j \equiv s, \tag{32}$$

и все решеточные поля начинают зависеть от параметра $\hbar$. Тогда, непрерывный (квазиклассический) предел может быть определен как

$$\hbar \to 0, \quad s = \lim_{\hbar\to 0,\ j>>1}(\hbar j), \tag{33}$$

а s выступает в роли непрерывной "решеточной" координаты.

Dля того, чтобы потоки (20–23) были нетривиальными и регулярными в пределе (33), необходимо дополнительно осуществить некоторые масштабные преобразования зависимых и независимых переменных, принадлежащих системе. Так, мы постулируем следующие правила перехода к новым эволюционным временам

$$t^{\pm}_{2n+1} \to \frac{1}{\sqrt{\hbar}} t^{\pm}_{2n+1}, \quad t^{\pm}_{2n} \to \frac{1}{\hbar} t^{\pm}_{2n} \ \Leftrightarrow\ D^{\pm}_{2n+1} \to \sqrt{\hbar} D^{\pm}_{2n+1}, \quad D^{\pm}_{2n} \to \hbar D^{\pm}_{2n} \tag{34}$$

и полям иерархии

$$\begin{array}{llllll} u_{2k,j} & \to & u_{2k}(\hbar j), & v_{2k,j} & \to & v_{2k}(\hbar j), \\ u_{2k+1,j} & \to & \dfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, u_{2k+1}(\hbar j), & v_{2k+1,j} & \to & \dfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, v_{2k+1}(\hbar j), \end{array} \tag{35}$$

полагая их несингулярными при $\hbar = 0$.

Теперь можно установить два нетривиальные ключевые свойства квазиклассического предела (33–35), которые имеют важное значение для дальнейшего рассмотрения и проверяются прямыми вычислениями.

Первое свойство состоит в том, что новые композитные поля, определенные по следующим правилам

$$\begin{array}{llllll} u^{(m)}_{2k,j} & \to & u^{(m)}_{2k}(\hbar j), & v^{(m)}_{2k,j} & \to & v^{(m)}_{2k}(\hbar j), \\ u^{(2m+1)}_{2k+1,j} & \to & \dfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, u^{(2m+1)}_{2k+1}(\hbar j), & v^{(2m+1)}_{2k+1,j} & \to & \dfrac{1}{\sqrt{\hbar}}\, v^{(2m+1)}_{2k+1}(\hbar j), \\ u^{(2m)}_{2k+1,j} & \to & \sqrt{\hbar}\, u^{(2m)}_{2k+1}(\hbar j), & v^{(2m)}_{2k+1,j} & \to & \sqrt{\hbar}\, v^{(2m)}_{2k+1}(\hbar j), \end{array} \tag{36}$$

регулярны в квазиклассическом пределе.

Из (33–36) и очевидных тождеств

$$(L^\alpha)_*^{2(m+1)} := (L^\alpha)_*^2 (L^\alpha)_*^{2m}, \quad (L^\alpha)_*^{(2m+1)} := L^\alpha (L^\alpha)_*^{2m}, \tag{37}$$

следующих из (16), можно получить, например, важные рекуррентные соотношения для лидирующих членов функционалов $u_k^{(m)} \equiv u_k^{(m)}(s)$

$$\begin{aligned} u_{2k}^{(2(l+1))} &= \sum_{n=0}^{k} u_{2n}^{(2)} u_{2(k-n)}^{(2l)}, \quad & u_{2k+1}^{(2(l+1))} &= \sum_{n=0}^{2k+1} u_{n}^{(2)} u_{2k-n+1}^{(2l)}, \\ u_{2k}^{(2l+1)} &= \sum_{n=0}^{2k} u_n u_{2k-n}^{(2l)}, & u_{2k+1}^{(2l+1)} &= \sum_{n=0}^{k} u_{2n+1} u_{2(k-n)}^{(2l)}, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} u_{2k}^{(2)} &= \sum_{n=0}^{k} u_{2n} u_{2(k-n)} + 2\sum_{n=0}^{k-1} (k-n-1) u_{2(k-n)-1} \partial_s u_{2n+1}, \\ u_{2k+1}^{(2)} &= \sum_{n=0}^{k} \Big[(1-2n) u_{2n} \partial_s u_{2(k-n)+1} + 2(k-n) u_{2(k-n)+1} \partial_s u_{2n} \Big], \end{aligned} \tag{39}$$

где $\partial_s := \frac{\partial}{\partial s}$.

Второе свойство сводится к тому, что в квазиклассическом пределе (33–36) потоки (20–23) $N = (1|1)$ 2DTL иерархии нетривиальны и регулярны. Так, явные выражения для их лидирующих членов следующие:

$$\begin{aligned} &\{m = 2l, \;\; k = 2r\}, \qquad \{m = 2l+1, \; k = 2r+1\} \\ D_{2n+1}^{-} u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} \Big[2(p-n) v_{2p+1}^{(2n+1)} \partial_s u_{k+2(p-n)}^{(m)} \\ &\quad + (k-m+2(p-n)) (\partial_s v_{2p+1}^{(2n+1)}) u_{k+2(p-n)}^{(m)} \Big] \\ &\quad + 2(-1)^k \sum_{p=0}^{n} v_{2p}^{(2n+1)} u_{k+2(p-n)-1}^{(m)}, \\ D_{2n}^{-} u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} \Big[2(p-n) v_{2p}^{(2n)} \partial_s u_{k+2(p-n)}^{(m)} \\ &\quad + (k-m+2(p-n)) (\partial_s v_{2p}^{(2n)}) u_{k+2(p-n)}^{(m)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2(-1)^k v_{2p+1}^{(2n)} u_{k+2(p-n)+1}^{(m)}\Big],\\
D_{2n}^{+} u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n} \Big[2(n-p) u_{2p}^{(2n)} \partial_s u_{k+2(n-p)}^{(m)}\\
&+ (k-m+2(n-p))(\partial_s u_{2p}^{(2n)}) u_{k+2(n-p)}^{(m)}\Big]\\
&+ 2(-1)^k \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}^{(2n)} u_{k+2(n-p)-1}^{(m)},\\
D_{2n+1}^{+} v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n} \Big[2(n-p) u_{2p+1}^{(2n+1)} \partial_s v_{k+2(p-n)}^{(m)}\\
&- (k-m+2(p-n))(\partial_s u_{2p+1}^{(2n+1)}) v_{k+2(p-n)}^{(m)}\\
&+ 2(-1)^k u_{2p}^{(2n+1)} v_{k-1+2(p-n)}^{(m)}\Big],\\
D_{2n}^{+} v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n} \Big[2(n-p) u_{2p}^{(2n)} \partial_s v_{k+2(p-n)}^{(m)}\\
&- (k-m+2(p-n))(\partial_s u_{2p}^{(2n)}) v_{k+2(p-n)}^{(m)}\Big]\\
&+ 2(-1)^k \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1}^{(2n)} v_{k+1+2(p-n)}^{(m)},\\
D_{2n}^{-} v_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} \Big[2(p-n) v_{2p}^{(2n)} \partial_s v_{k+2(n-p)}^{(m)}\\
&- (k-m+2(n-p))(\partial_s v_{2p}^{(2n)}) v_{k+2(n-p)}^{(m)}\\
&+ 2(-1)^k v_{2p+1}^{(2n)} v_{k+2(n-p)-1}^{(m)}\Big],
\end{aligned} \tag{40}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\{m = 2l,\ \ k = 2r+1\}, \qquad \{m = 2l+1,\ k = 2r\}\\
D_{n}^{-} u_k^{(m)} &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{m(p+n)} \Big[(p-n) v_p^{(n)} \partial_s u_{k+p-n}^{(m)}\\
&+ (k+p-n-m)(\partial_s v_p^{(n)}) u_{k+p-n}^{(m)}\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^+_{2n} u^{(m)}_k &= \sum_{p=0}^{2n} (-1)^{mp} \Big[(2n-p) u^{(2n)}_p \partial_s u^{(m)}_{k-p+2n} \\
&\quad + (k-p+2n-m)(\partial_s u^{(2n)}_p) u^{(m)}_{k-p+2n} \Big], \\
D^+_{n} v^{(m)}_k &= \sum_{p=0}^{n} (-1)^{m(p+n)} \Big[(n-p) u^{(n)}_p \partial_s v^{(m)}_{k+p-n} \\
&\quad - (k+p-n-m)(\partial_s u^{(n)}_p) v^{(m)}_{k+p-n} \Big], \\
D^-_{2n} v^{(m)}_k &= \sum_{p=0}^{2n-1} (-1)^{mp} \Big[(p-2n) v^{(2n)}_p \partial_s v^{(m)}_{k-p+2n} \\
&\quad - (k-p+2n-m)(\partial_s v^{(2n)}_p) v^{(m)}_{k-p+2n} \Big],
\end{aligned} \tag{41}
$$

а также

$$
\begin{aligned}
D^+_{2n+1} u^{(2m)}_{2k} &= 2 \sum_{p=0}^{n} \Big[(n-p) u^{(2n+1)}_{2p+1} \partial_s u^{(2m)}_{2(k-p+n)} \\
&\quad + (k-p+n-m)(\partial_s u^{(2n+1)}_{2p+1}) u^{(2m)}_{2(k-p+n)} \\
&\quad + u^{(2n+1)}_{2p} u^{(2m)}_{2(k-p+n)+1} \Big], \\
D^+_{2n+1} u^{(2m+1)}_{2k+1} &= 2 \sum_{p=1}^{k} \Big[p u^{(2n+1)}_{2(p+n)+1} \partial_s u^{(2m+1)}_{2(k-p)+1} \\
&\quad + (m+p-k)(\partial_s u^{(2n+1)}_{2(p+n)+1}) u^{(2m+1)}_{2(k-p)+1} \Big] \\
&\quad + 2 \sum_{p=0}^{k} u^{(2n+1)}_{2(p+n+1)} u^{(2m+1)}_{2(k-p)}, \\
D^+_{2n+1} u^{(2m+1)}_{2k} &= \sum_{p=1}^{2k} (-1)^p \Big[p u^{(2n+1)}_{p+2n+1} \partial_s u^{(2m+1)}_{2k-p} \\
&\quad + (2(m-k)+p+1)(\partial_s u^{(2n+1)}_{p+2n+1}) u^{(2m+1)}_{2k-p} \Big], \\
D^+_{2n+1} u^{(2m)}_{2k+1} &= \sum_{p=0}^{2n+1} \Big[(2n-p+1) u^{(2n+1)}_p \partial_s u^{(2m)}_{2(k+n+1)-p} \\
&\quad + (2(k+n-m+1)-p)(\partial_s u^{(2n+1)}_p) u^{(2m)}_{2(k+n+1)-p} \Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D^-_{2n+1} v^{(2m)}_{2k} &= 2\sum_{p=0}^{n-1}\Big[(p-n) v^{(2n+1)}_{2p+1}\partial_s v^{(2m)}_{2(k-p+n)} \\
&- (k-p+n-m)(\partial_s v^{(2n+1)}_{2p+1}) v^{(2m)}_{2(k-p+n)}\Big] \\
&+ 2\sum_{p=0}^{n} v^{(2n+1)}_{2p} v^{(2m)}_{2(k-p+n)+1}, \\
D^-_{2n+1} v^{(2m+1)}_{2k+1} &= 2\sum_{p=0}^{k}\Big[-p v^{(2n+1)}_{2(p+n)+1}\partial_s v^{(2m+1)}_{2(k-p)+1} \\
&+ (k-p-m)\partial_s v^{(2n+1)}_{2(p+n)+1}) v^{(2m+1)}_{2(k-p)+1} \\
&+ v^{(2n+1)}_{2(p+n+1)} v^{(2m+1)}_{2(k-p)}\Big], \\
D^-_{2n+1} v^{(2m+1)}_{2k} &= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\Big[-p v^{(2n+1)}_{p+2n+1}\partial_s v^{(2m+1)}_{2k-p} \\
&- (2(m-k)+p+1)(\partial_s v^{(2n+1)}_{p+2n+1}) v^{(2m+1)}_{2k-p}\Big], \\
D^-_{2n+1} v^{(2m)}_{2k+1} &= \sum_{p=0}^{2n}\Big[-(2n-p+1) v^{(2n+1)}_{p}\partial_s v^{(2m)}_{2(k+n+1)-p} \\
&- (2(k+n-m+1)-p)(\partial_s v^{(2n+1)}_{p}) v^{(2m)}_{2(k+n+1)-p}\Big], \qquad (42)
\end{aligned}
$$

где в правых частях все поля $\{u^{(m)}_k,\ v^{(m)}_k\}$ с $k < 0$ должны быть положены равными нулю. Полученные таким способом потоки (40–42) мы называем бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархией. Представление Лакса для них будет построено в параграфе 3.3.

3.2 бездисперсионное N=(1|1) 2DTL уравнение и его бозонные симметрии

бездисперсионные пределы $N = (1|1)$ 2DTL уравнения (26) и его бозонных симметрий (30) могут быть получены без труда, если использовать соотношения (31–36). Получаем, сответственно:

$$
D^+_1 D^-_1 \ln v_0 = 2\partial_s v_0 \qquad (43)
$$

и

$$
\begin{aligned}
D^{\pm}_{2n} v_0 &= v_0 \partial_s u^{(2n)\pm}_{2n}, \quad u^{(2n)\pm}_{0,j} = 1, \\
\mp D^{\mp}_1 u^{(2n)\pm}_{2k+1} &= v_0 \partial_s u^{(2n)\pm}_{2k} + 2(n-k)(\partial_s v_0) u^{(2n)\pm}_{2k}, \\
\pm D^{\mp}_1 u^{(2n)\pm}_{2k} &= 2 v_0 u^{(2n)\pm}_{2k-1}.
\end{aligned} \tag{44}
$$

Исключая $u^{(2n)\pm}_{2k+1}$ из системы уравнений (44), окончательно получаем следующую рекуррентную систему уравнений для генерации бозонных симметрий бездисперсионного $N = (1|1)$ 2DTL уравнения (43)

$$
\begin{aligned}
D^{\pm}_{2n} v_0 &= v_0 \partial_s u^{(2n)\pm}_{2n}, \quad u^{(2n)\pm}_{0,j} = 1, \\
-D^{\mp}_1 u^{(2n)\pm}_{2k} &= 2 v_0 (D^{\mp}_1)^{-1} \Big[v_0 \partial_s u^{(2n)\pm}_{2(k-1)} + 2(n-k+1)(\partial_s v_0) u^{(2n)\pm}_{2(k-1)} \Big].
\end{aligned} \tag{45}
$$

Отметим, что симметрии бозонного бездисперсионного 2DTL уравнения были найдены в работе [32] (см. также работу [26]) путем решения соответствующего, достаточно сложного уравнения симметрии.

3.3 Представление Лакса

В параграфе 3.1 были построены потоки (40–42) бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии. Нашей задачей сейчас будет нахождение соответствующего им представления Лакса. Поскольку представление Лакса (15) $N = (1|1)$ 2DTL иерархии выражается в терминах обобщенной градуированной скобки (3), из предыдущего опыта естественно ожидать, что для получения его квазиклассического предела, соответствующего бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, достаточно заменить в нем эту скобку на определенную суперскобку Пуассона, а операторы - на их символы, заданные на соответствующем фазовом пространстве.

Нашей ближайшей задачей будет моделирование фазового пространства и суперскобки Пуассона, исходя из некоторых свойств, которыми они должны быть наделены. Так, вспоминая, что операторы Лакса $N = (1|1)$ 2DTL иерархии, будучи заданными на пространстве операторов, градуированном двумя разными Z_2–градуировками (8) и (10), обладают только одной диагональной Z_2–градуировкой (11), можно полагать, что фазовое пространство унаследует эти свойства.

Принимая во внимание Z_2–градуировку $d_{e^\partial} = 1$, $d_{e^{2\partial}} = 0$ (10) оператора решеточного сдвига $e^{l\partial}$, мы предполагаем, что на фазовом пространстве ему соответствуют две координаты, а именно, грассманова координата π ($\pi^2 = 0$) и бозонная координата p, со следующими правилами соответствия:

$$e^\partial \;\to\; \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\,\pi, \quad e^{2\partial} \;\to\; p. \tag{46}$$

Несмотря на грассмановость координаты π, она должна обладать *"нетипичным"* для грассмановых координат свойством коммутировать не только с бозонными, но и фермионными полями иерархии, что следует из непрерывного предела соотношения (9).

Очевидно, что, кроме координат π и p, фазовое пространство должно также включать непрерывную "решеточную" координату s (32). Возникающее в результате фазовое суперпространство $\{\pi,\ p,\ s\}$ бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии содержит фазовое пространство $\{p,\ s\}$ бездисперсионной 2DTL иерархии как подпространство.

После того, как координаты фазового пространства установлены, мы должны построить для них суперскобки Пуассона. Вспоминая, что суперскобки Пуассона должны находиться в соответствии с супералгеброй Z_2–градуированных операторов $\{\sqrt{\hbar}e^{\partial},\ e^{2\partial},\ \hbar j\}$, которым отвечают координаты фазового суперпространства $\{\pi,\ p,\ s\}$, эти суперскобки могут быть сравнительно легко сконструированы. Приведем здесь суперскобки Пуассона между двумя произвольными функциями $\mathbb{F}_{1,2} \equiv \mathbb{F}_{1,2}(\pi, p, s)$ на фазовом пространстве, полученные способом, изложенным выше:

$$\begin{aligned}\Big\{\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2\Big\} = 2p\,\Big(&\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial p}\,\frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial s}\,\frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial p} + \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \pi}\,\frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \pi}\Big)\\ &+ \pi\,\Big(\frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \pi}\,\frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial s}\,\frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \pi}\Big).\end{aligned} \tag{47}$$

Здесь уместно отметить, что после перехода к новому базису $\{\widetilde{s}, \widetilde{p}, \widetilde{\pi}\}$ фазового пространства, задаваемому формулами

$$\begin{aligned}&\widetilde{s} := \frac{s}{2}, \quad \widetilde{p} := \ln p, \quad \widetilde{\pi} := \frac{\pi}{\sqrt{2p}},\\ &s := 2\widetilde{s}, \quad p := e^{\widetilde{p}}, \quad \pi := \sqrt{2}\widetilde{\pi}e^{\frac{\widetilde{p}}{2}},\end{aligned} \tag{48}$$

суперскобки Пуассона (47) принимают вид

$$\Big\{\mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2\Big\} = \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \widetilde{p}} \, \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \widetilde{s}} - \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \widetilde{s}} \, \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \widetilde{p}} + \frac{\partial \mathbb{F}_1}{\partial \widetilde{\pi}} \, \frac{\partial \mathbb{F}_2}{\partial \widetilde{\pi}}, \tag{49}$$

что соответствует канонической ортосимплектической структуре фазового суперпространства.

Теперь мы перейдем к следующему этапу получения представления Лакса бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии и приведем эвристические формулы определения и построения символов $\mathcal{L}^{\pm}$ и $(\mathcal{L}^{\pm})_*^{2m}$ операторов Лакса $L^{\pm}$ (14) и композитных операторов $(L^{\pm})_*^n$ (16–17)

$$L^{\pm} \ \rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \, \mathcal{L}^{\pm},$$

$$\mathcal{L}^{+} = \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k+1} + u_{2k}\pi) p^{-k}, \qquad \mathcal{L}^{-} = \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k-1} + v_{2k}\pi) p^{k-1} \tag{50}$$

и

$$\begin{aligned}
&(L^{\pm})_*^{2m} \ \rightarrow \ (\mathcal{L}^{\pm})_*^{2m}, \quad (L^{\pm})_*^{2m+1} \ \rightarrow \ \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \, (\mathcal{L}^{\pm})_*^{2m+1}, \\
&(\mathcal{L}^{+})_*^{2m} \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k}^{(2m)} + u_{2k-1}^{(2m)}\pi) p^{m-k}, \\
&(\mathcal{L}^{-})_*^{2m} \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k}^{(2m)} + v_{2k+1}^{(2m)}\pi) p^{k-m}, \\
&(\mathcal{L}^{+})_*^{2m+1} := \ \sum_{k=0}^{\infty} (u_{2k+1}^{(2m+1)} + u_{2k}^{(2m+1)}\pi) p^{m-k}, \\
&(\mathcal{L}^{-})_*^{2m+1} := \ \sum_{k=0}^{\infty} (v_{2k-1}^{(2m+1)} + v_{2k}^{(2m+1)}\pi) p^{k-m-1},
\end{aligned} \tag{51}$$

соответственно. По определению, все поля $\{u_k^{(m)}, \ v_k^{(m)}\}$ с $k < 0$ должны быть положены равными нулю. При получении этих выражений мы использовали подстановки (36) и (46). Заметим, что эти символы в общем случае некоммутативны

$$(\mathcal{L}^{\alpha})_*^k (\mathcal{L}^{\beta})_*^m = (-1)^{km} ((\mathcal{L}^{\beta})_*^m)^{*(k)} ((\mathcal{L}^{\alpha})_*^k)^{*(m)}, \quad \alpha, \beta = +, -, \tag{52}$$

что связано с *"нетипичным"* свойством грассмановой координаты π, отмеченным выше (см. параграф после (46)).

И, наконец, заменяя операторы Лакса на их символы (50–51), а обобщенную градуированную скобку (3) на суперскобку Пуассона (47) в представлениях Лакса (15) и (19) для $N = (1|1)$ 2DTL иерархии и в определяющих его соотношениях (16) по правилу

$$\Big[\ \dots\ ,\ \dots\ \Big\}\ \rightarrow\ \hbar\ \Big\{\ \dots\ ,\ \dots\ \Big\}, \tag{53}$$

осуществляя затем подстановку (34) и переходя к пределу (33), мы получаем выражения

$$D_n^{\pm}\mathcal{L}^{\alpha} = \mp\alpha(-1)^n\Big\{(((\mathcal{L}^{\pm})_*^n)_{-\alpha})^*, \mathcal{L}^{\alpha}\Big\}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \alpha = +,-, \tag{54}$$

$$D_n^{\pm}(\mathcal{L}^{\alpha})_*^m = \mp\alpha(-1)^{nm}\Big\{(((\mathcal{L}^{\pm})_*^n)_{-\alpha})^{*(m)}, (\mathcal{L}^{\alpha})_*^m\Big\}, \quad n,m \in \mathbb{N}, \tag{55}$$

$$(\mathcal{L}^{\alpha})_*^{2m} := \left(\ \frac{1}{2}\ \Big\{(\mathcal{L}^{\alpha})^*, \mathcal{L}^{\alpha}\Big\}\ \right)^m, \quad (\mathcal{L}^{\alpha})_*^{2m+1} := \mathcal{L}^{\alpha}\ (\mathcal{L}^{\alpha})_*^{2m} \tag{56}$$

для бездисперсионной $N = (1|1)$ 2DTL иерархии. Прямые вычисления подтверждают, что полученные соотношения (55–56) правильно воспроизводят бездисперсионные потоки (38–42), т.е. являются *искомым представлением Лакса для бездисперсионной* $N = (1|1)$ *2DTL иерархии.*

4 заключение

В данной работе мы предложили скобочную операцию (3) со свойствами (4–6) на пространстве градуированных операторов с инволюцией, обобщающую градуированный коммутатор суперsuccалгебр.

Затем мы получили новую форму представления Лакса (15–16) и (19) для двумерной $N = (1|1)$ суперсимметричной решеточной иерархии Тоды в терминах обобщенной градуированной скобки. Dалее мы использовали это представление при построении квазиклассического предела (33–36) этой иерархии — бездисперсионной $N = (1|1)$ иерархии Тоды (40–42), и его представления Лакса (50–51), (54–56)

на градуированном фазовом суперпространстве со скобкой Пуассона (47). И, наконец, попутно мы установили бозонные симметрии (45) бездисперсионного $N = (1|1)$ суперсимметричного уравнения Тоды (43).

Один из нас (В.К.) впервые познакомился с А.А. Логуновым, еще будучи студентом II курса Физического факультета МГУ (1956), и на протяжении прошедших десятилетий ощущал с его стороны огромную поддержку как в делах, связанных с наукой, так и в жизни. Будьте здоровы, дорогой Анатолий Алексеевич!

References

[1] N.N. Bogoliubov, A.A. Logunov, A.I. Oksak and I.T. Todorov, *Общие принципы квантовой теории поля*, Москва, Наука (1987).

[2] K. Ueno and K. Takasaki, *Toda lattice hierarchy*, *Adv. Stud. in Pure Math.* **4** (1984) 1.

[3] k. Ikeda, *A supersymmetric extension of the Toda lattice hierarchy*, *Lett. Math. Phys.* 14 (1987) 321; *The super-Toda lattice hierarchy*, *RIMS* **25** (1989) 829.

[4] k. Takasaki, *Differential algebras and D-modules in super Toda lattice hierarchy*, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990) 229.

[5] A.N. Leznov and A.S. Sorin, *Two-dimensional superintegrable mappings and integrable hierarchies in the* $(2|2)$ *superspace*, *Phys. Lett.* **B389** (1996) 494, hep-th/9608166; *Integrable mappings and hierarchies in the* $(2|2)$ *superspace*, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B56** (1997) 258.

[6] O. Lechtenfeld and A. Sorin, *Fermionic flows and tau function of the* $N = (1|1)$ *superconformal Toda lattice hierarchy*, *Nucl. Phys.* **B557** (1999) 535, solv-int/9810009; *Hidden* $N = (2|2)$ *supersymmetry of the* $N = (1|1)$ *supersymmetric Toda lattice hierarchy*, *J. Nonlinear Math. Phys.* **8** (2001) 183, nlin.SI/0007009.

[7] V.G. Kadyshevsky and A.S. Sorin, *Supersymmetric Toda lattice hierarchies*, in *Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories* (Eds. H. Aratyn and A.S. Sorin), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London, (2001) 289-316, nlin.SI/0011009.

[8] M.V. Saveliev and P. Sorba, *Solution of the Cauchy problem for a continuous limit of the Toda lattice and its superextension*, *Lett. Math. Phys.* **22** (1991) 119.

[9] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov, *Quasi-potential approach and the expansion in relativistic spherical functions*, *Nuovo Cimento* **A55** (1968) 233.

[10] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov, *Relativistic two-body problem and finite-difference calculus*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **9** (1969) 212.

[11] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and N.B. Skachkov, *The Schroedinger difference equation for two relativistic particles in the simplest cases*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **9** (1969) 462.

[12] V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov and M. Freeman, *Hypergeometric difference equations and Coulomb relativistic problem*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **9** (1969) 646.

[13] C. Itzykson, V.G. Kadyshevsky and I.T. Todorov, *Three-dimensional formulation of the relativistic two-body problem and infinite-component wave equations*, *Phys. Rev.* **D1** (1970) 2823.

[14] V.G. Kadyshevsky, *Quantum field theory and the momentum space of a constant curvature*, In the book *"Problems of Theoretical Physics"* dedicated to the memory of I.E. Tamm, M., "Nauka", (1972) 52.

[15] V.G. Kadyshevsky, *Fundamental length as a new scale in quantum field theory*, *Proceedings of the International Conference on High Energy Physics and Elementary Particles*, Warsaw, (1975) 305.

[16] D.V. Fursaev and V.G. Kadyshevsky, *Difference equations and gauge symmetry*, *CRM Proceedings and Lecture Notes* **9** (1996) 125.

[17] K. Takasaki and T. Takebe, *SDIFF(2) Toda equation – hierarchy, tau functions and symmetries*, *Lett. Math. Phys.* **23** (1991) 205, hep-th/9112042.

[18] K. Takasaki and T. Takebe, *Quasi–classical limit of Toda hierarchy and W–infinity symmetries*, *Lett. Math. Phys.* **28** (1993) 165, hep-th/9301070.

[19] K. Takasaki and T. Takebe, *Integrable hierarchies and dispersionless limit*, *Rev. Math. Phys.* **7** (1995) 743, hep-th/9405096.

[20] C.P. Boyer and J.D. Finley, *Killing vectors in self–dual Euclidean Einstein spaces*, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 1126.

[21] I. Bakas, *The structure of the W_∞ algebra*, *Commun. Math. Lett.* **134** (1990) 487.

[22] Q-Han Park, *Extended conformal symmetries in real heavens*, *Phys. Lett.* **B236** (1990) 429.

[23] R. S. Ward, *Einstein–Weyl spaces and $SU(\infty)$ Toda fields*, *Class. Quantum Grav.* **7** (1990) L95.

[24] I. Krichever, *Dispersionless Lax equations and topological minimal models*, *Commun. Math. Phys.* **143** (1992) 415.

[25] F. Delduc, M.V. Saveliev and P. Sorba, *Continuum Lie algebras and the scalar–flat Kähler surfaces*, *Phys. Lett.* **B277** (1992) 411.

[26] J. Hoppe and Q-Han Park, *Infinite charge algebra of gravitational instantons*, *Phys. Lett.* **B231** (1994) 333, hep-th/9312020.

[27] K. Takasaki, *Dispersionless Toda hierarchy and two-dimensional string theory*, *Commun. Math. Phys.* **170** (1995) 101, hep-th/9403190.

[28] L. Bonora and C.S. Xiong, *Two–matrix model and $c = 1$ string theory*, *Phys. Lett.* **B347** (1995) 41, hep-th/9405004.

[29] D. M. Calderbank and P. Tod, *Einstein metrics, hypercomplex structures and the Toda field equation*, *Differ. Geom. Appl.* **14** (2001) 199, math.DG/9911121.

[30] V. Kazakov, I. Kostov and D. Kutasov, *A matrix model for the two dimensional black hole*, *Nucl. Phys.* **B622** (2002) 141, hep-th/0101011.

[31] S. Alexandrov and V. Kazakov, *Correlators in 2D string theory with vortex condensation*, *Nucl. Phys.* **B610** (2001) 77, hep-th/0104094.

[32] D.B. Fairlie and A.N. Leznov, *Infinite series solutions of the symmetry equation for the 1+2 dimensional continuous Toda chain*, hep-th/9512217.